OCT 19 1926

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 156.

Heft 1.

Ausgegeben den 13. September

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1926

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 156. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

Staude, Otto, Zur Theorie des Flächenbüschels 2. Ordnung . . . . . Seite 1
Breuer, Samson, Metazyklische Minimalbasis und komplexe Primzahlen . . . — 13
Buschmann, Fritz, Die Transformation einer Gruppe ausgezeichneter Kurven erster Art in einen gewöhnlichen Punkt . . . . . — 43
Jänichen, Walther, Über die Näherungsnenner *Stieltjes*scher Kettenbrüche . . — 55
Hoheisel, Guido, Auswertung bestimmter Integrale . . . . . — 67

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schaefer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 156.

In vier Heften.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1927.

Ausgabedaten der Hefte von Band 156.

Heft 1 ausgegeben am 13. September 1926
Heft 2 ausgegeben am 28. Januar 1927
Heft 3 ausgegeben am 28. März 1927
Heft 4 ausgegeben am 14. Juni 1927

Zur Theorie des Flächenbüschels 2. Ordnung.

Von *Otto Staude* in Rostock.

Unter den 13 Arten des Flächenbüschels 2. Ordnung [1]) sind zwei Arten dadurch gekennzeichnet, daß bei beiden die Büscheldeterminante $\Delta(\lambda)$ eine *vierfache* Wurzel $\lambda = \lambda_1$ hat, für die nicht alle Unterdeterminanten 2. Grades $\delta_{\varkappa l}(\lambda)$ von $\Delta(\lambda)$, wohl aber alle Unterdeterminanten 3. Grades $\Delta_{\varkappa l}(\lambda)$ verschwinden. Der *Unterschied* der beiden Arten beruht nach der Theorie der Elementarteiler *lediglich* darauf, daß bei der einen die Unterdeterminanten $\Delta_{\varkappa l}(\lambda)$ den Faktor $(\lambda - \lambda_1)^2$, bei der andern nur den Faktor $(\lambda - \lambda_1)^1$ enthalten. Was gerade dieser Unterschied bei den Flächen 2. Ordnung für eine *geometrische* Bedeutung hat, ist im einzelnen wohl bekannt [2]), kann aber in der Form noch etwas allgemeiner begründet werden. Dies soll im folgenden geschehen, nicht nur für zwei *Flächen* 2. *Ordnung*, sondern auch für zwei *allgemeine Korrelationen*.

1. Hauptpunkte beim Flächenbüschel. Die beiden eigentlichen Flächen 2. Ordnung:

$$(1) \qquad f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{\varkappa l} x_\varkappa x_l = 0, \quad g = \sum_1^4 \sum_1^4 b_{\varkappa l} x_\varkappa x_l = 0$$

bestimmen das Flächenbüschel:

$$(2) \qquad f - \lambda g = 0$$

mit der Determinante:

$$(3) \qquad \Delta(\lambda) = |a_{\varkappa l} - \lambda b_{\varkappa l}|.$$

Die Unterdeterminanten 3. Grades seien mit $\Delta_{\varkappa l}(\lambda)$, die 2. Grades mit $\delta_{\varkappa l}(\lambda)$ bezeichnet, wo $\varkappa$ und l je die Nummern 1, 2, . . ., 6 der Variationen 23, 31, 12, 14, 24, 34 bedeuten [3]).

Die Gleichungen:

$$(4) \qquad \sum_1^4 (a_{\varkappa l} - \lambda_i b_{\varkappa l}) x_l^{(i)} = 0, \quad \varkappa = 1, 2, 3, 4,$$

bestimmen, wenn $\lambda = \lambda_i$ eine Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ ist, den zu dieser Wurzel gehörigen „*Hauptpunkt*“ [4]) $x^{(i)}$, der eine doppelte Bedeutung hat. Er ist

[1]) Enzyklopädie der Math. III 2, S. 216.

[2]) Vgl. die neueste Darstellung in *Heffter*s Analyt. Geom. 1923, S. 384.

[3]) *Staude* I, Geom. des Punktes, der Geraden und der Ebene, S. 410, (4).

[4]) *Reye*, Geom. d. Lage III (1910), S. 31.

die *Spitze des Kegels* $f - \lambda_i g = 0$ im Büschel; er ist aber auch ein *Punkt gleicher Polarebene* $u^{(i)}$ in bezug auf die beiden Flächen (1). Die Ebene $u^{(i)}$, für die bis auf einen Proportionalitätsfaktor:

$$(5) \qquad u_\varkappa^{(i)} = \sum_1^4{}^{l} a_{\varkappa l} x_l^{(i)} = \lambda_i \sum_1^4{}^{l} b_{\varkappa l} x_l^{(i)},$$

mag dann als die zur Wurzel λ_i gehörige *Hauptebene* bezeichnet werden; sie ist eine *Ebene gleichen Poles* in bezug auf beide Flächen (1).

2. Hauptpunktreihen. Dabei ist zunächst angenommen, daß für die Wurzel $\lambda = \lambda_i$ von der Multiplizität l_i nicht alle Unterdeterminanten $\Delta_{\varkappa l}(\lambda)$ verschwinden oder $l_i' = 0$ ist, wenn $(\lambda - \lambda_i)^{l_i'}$ die höchste Potenz von $\lambda - \lambda_i$ bedeutet, die in allen $\Delta_{\varkappa l}(\lambda)$ enthalten ist. Dann gehört zu λ_i vermöge der Gleichungen (4) nur *ein* Hauptpunkt, für den mit $\varkappa = 1, 2, 3$ oder 4:

$$(6) \qquad x_1^{(i)} : x_2^{(i)} : x_3^{(i)} : x_4^{(i)} = \Delta_{\varkappa 1}(\lambda_i) : \Delta_{\varkappa 2}(\lambda_i) : \Delta_{\varkappa 3}(\lambda_i) : \Delta_{\varkappa 4}(\lambda_i).$$

Es kann aber auch sein, daß für $\lambda = \lambda_i$ alle $\Delta_{\varkappa l}(\lambda)$ und nicht alle $\delta_{\varkappa l}(\lambda)$ verschwinden oder $l_i' > 0$, $l_i'' = 0$ ist, wenn $(\lambda - \lambda_i)^{l_i''}$ die höchste Potenz von $\lambda - \lambda_i$ bedeutet, die in allen $\delta_{\varkappa l}(\lambda)$ enthalten ist. Dann wird aus dem Kegel $f - \lambda_i g = 0$ ein Ebenenpaar, und die Gleichungen (4) bestimmen die *Doppellinie dieses Ebenenpaares* mit den Achsenkoordinaten:

$$(7) \quad q_1 : q_2 : q_3 : q_4 : q_5 : q_6 = \delta_{\varkappa 1}(\lambda_i) : \delta_{\varkappa 2}(\lambda_i) : \delta_{\varkappa 3}(\lambda_i) : \delta_{\varkappa 4}(\lambda_i) : \delta_{\varkappa 5}(\lambda_i) : \delta_{\varkappa 6}(\lambda_i),$$

$\varkappa = 1, 2, \ldots$ oder 6. Sie ist dann zugleich die zur Wurzel λ_i gehörige „*Hauptpunktreihe*"; jeder ihrer Punkte hat in bezug auf f und g dieselbe Polarebene; das Büschel dieser Polarebenen ist das zur Wurzel λ_i gehörige „*Hauptebenenbüschel*".

Reihe und Büschelachse sind „*Hauptgerade*", d. h. reziproke Polaren sowohl in bezug auf f als auf g. Es handelt sich aber hier um besondere Hauptgeraden.

3. Hauptgerade. Im allgemeinen bestehen Hauptgerade nicht aus lauter Hauptpunkten. Vielmehr bestimmen die Gleichungen:

$$(8) \qquad \sum_1^6{}^{l} (a_{\varkappa l} - \varrho_m \beta_{\varkappa l}) p_l^{(m)} = 0, \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots, 6,$$

wo ϱ_m eine Wurzel der Gleichung 6. Grades:

$$(9) \qquad \Theta(\varrho) = |a_{\varkappa l} - \varrho \beta_{\varkappa l}| = 0$$

ist, die zu dieser Wurzel ϱ_m gehörige Hauptgerade $p^{(m)}$. Dabei bedeuten $\alpha_{\varkappa l}$ und $\beta_{\varkappa l}$ die Unterdeterminanten 2. Grades[1]) der Determinanten $A = |a_{\varkappa l}|$ und $B = |b_{\varkappa l}|$. Die Hauptgerade $p^{(m)}$ hat in bezug auf f und g dieselbe reziproke Polare $p'^{(m)}$, für die bis auf einen Proportionalitätsfaktor[2]):

$$(10) \qquad p'^{(m)}_{\bar\varkappa} = \sum_1^6{}^{l} \alpha_{\varkappa l} p_l^{(m)} = \varrho_m \sum_1^6{}^{l} \beta_{\varkappa l} p_l^{(m)},$$

indem $\bar\varkappa$ die komplementäre Variation zu $\varkappa$ bedeutet[3]). Dabei ist $p'^{(m)}$ auch Haupt-

---

[1]) *Staude* I, S. 410, (4).
[2]) *Staude* II, Geom. der Kegelschnitte und Flächen 2. Ordn., S. 835, (4).
[3]) *Staude* I, S. 411, (11).

gerade und gehört, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll, zu der zu ϱ_m reziproken Wurzel $\varrho_n = \dfrac{A}{B\varrho_m}$ der Gleichung (9).

Durch Multiplikation der Gleichung (10) mit $p_\varkappa^{(m)}$ und Summation über $\varkappa$ ergibt sich:

$$\sum_1^6{}_\varkappa\, p_\varkappa^{(m)} p_{\bar\varkappa}'^{(m)} = \sum_1^6{}_\varkappa \sum_1^6{}_l\, a_{\varkappa l} p_\varkappa^{(m)} p_l^{(m)} = \varrho_m \sum_1^6{}_\varkappa \sum_1^6{}_l\, \beta_{\varkappa l} p_\varkappa^{(m)} p_l^{(m)}$$

oder, unter Verwendung der allgemeinen Abkürzungen:

$$(11) \qquad \varphi_{mn} = \sum_1^6{}_\varkappa \sum_1^6{}_l\, a_{\varkappa l} p_\varkappa^{(m)} p_l^{(n)}, \quad \psi_{mn} = \sum_1^6{}_\varkappa \sum_1^6{}_l\, \beta_{\varkappa l} p_\varkappa^{(m)} p_l^{(n)},$$

das Resultat:

$$(12) \qquad \varphi_{mm} = \varrho_m \psi_{mm} = \sum_1^6{}_\varkappa\, p_\varkappa^{(m)} p_{\bar\varkappa}'^{(m)}.$$

Dabei bedeutet $\varphi_{mn} = 0$ oder $\psi_{mm} = 0$, daß $p^{(m)}$ Tangente von f oder g ist und kommt in (12) zum Ausdruck, daß, wenn eine Hauptgerade $p^{(m)}$ Tangente der einen Grundfläche ist, sie auch Tangente der anderen ist in dem Punkte, in welchem sie von ihrer reziproken Polaren $p'^{(m)}$ geschnitten wird.

4. Zwei oder mehrfache Wurzel. Wenn zur Wurzel $\lambda = \lambda_i$ eine *Hauptpunktreihe* q in (7) gehört, so ist λ_i wegen $l_i > l_i'$ mindestens Doppelwurzel, also $\Delta(\lambda_i) = 0$ und $\Delta'(\lambda_i) = 0$. Es ist aber für die Determinante (3):

$$(13) \quad -\Delta'(\lambda) = \sum_1^4{}_\varkappa \sum_1^4{}_l\, b_{\varkappa l} \Delta_{\varkappa l}(\lambda), \quad \frac{1}{2}\Delta''(\lambda) = \sum_1^6{}_\varkappa \sum_1^6{}_l\, \beta_{\bar\varkappa \bar l} \delta_{\varkappa l}(\lambda).$$

Andrerseits folgt aus (7), abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor:

$$(14) \qquad q_\varkappa^{(m)} q_l^{(m)} = \delta_{\varkappa l}(\lambda_i),$$

wo der Index m andeuten mag, daß die Hauptgerade q zur Wurzel ϱ_m von (9) gehört. Damit wird aus (13):

$$(15) \quad \frac{1}{2}\Delta''(\lambda_i) = \sum_1^6{}_\varkappa \sum_1^6{}_l\, \beta_{\bar\varkappa \bar l} q_\varkappa^{(m)} q_l^{(m)} = \sum_1^6{}_\varkappa \sum_1^6{}_l\, \beta_{\varkappa l} p_\varkappa^{(m)} p_l^{(m)} = \psi_{mm},$$

wenn rechts statt der Achsenkoordinaten q die Strahlenkoordinaten p der Reihe eingeführt werden. Aus (15) und (12) folgt dann:

$$(16) \qquad \frac{1}{2}\varrho_m \Delta''(\lambda_i) = \varphi_{mm} = \varrho_m \psi_{mm} = \sum_1^6{}_\varkappa\, p_\varkappa^{(m)} p_{\bar\varkappa}'^{(m)}.$$

Diese Gleichung besagt aber:

I. *Gehört zu einer Wurzel λ_i eine Reihe von Hauptpunkten $x^{(i)}$ und ein Büschel von Hauptebenen $u^{(i)}$ ($l_i > 1$, $l_i' > 0$, $l_i'' = 0$), so liegen Reihe $p^{(m)}$ und Büschelachse $p'^{(m)}$ windschief oder vereinigt, je nachdem λ_i eine zweifache ($l_i = 2$) oder mehrfache Wurzel ($l_i = 3, 4$) ist.*

5. Weitere Unterscheidung der vereinigten Lage. Bei einer *dreifachen* Wurzel $\lambda_1 (l_1 = 3)$ der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$, neben der dann noch eine einfache

λ_4 vorhanden ist, haben $p^{(m)}$ und $p'^{(m)}$ bei ihrer *vereinigten* Lage nur *einen* Punkt gemein, da dann, wie nur kurz erwähnt sei, $p'^{(m)}$ durch den zu λ_4 gehörigen Hauptpunkt $x^{(4)}$ geht, der von der Hauptpunktreihe $p^{(m)}$ getrennt liegt.

Dagegen bleibt bei einer *vierfachen* Wurzel $\lambda_1 (l_1 = 4)$ die Frage offen, ob die beiden Strahlen $p^{(m)}$ und $p'^{(m)}$ bei ihrer nach (16) *vereinigten* Lage nur *einen* Punkt gemein haben oder *ganz zusammenfallen*. Wir betrachten dazu die beiden Fälle $l_1 = 4$, $l_1' = 2$ *oder* 1, $l_1'' = 0$, wo entweder $(\lambda - \lambda_1)^2$ oder $(\lambda - \lambda_1)^1$ die höchste Potenz von $\lambda - \lambda_1$ ist, die in allen Unterdeterminanten $\Delta_{xl}(\lambda)$ vorkommt. Es ist dann $\lambda = \lambda_1$ *zweifache oder einfache* Wurzel *aller* $\Delta_{xl}(\lambda)$ und verschwinden daher für $\lambda = \lambda_1$ neben $\Delta_{xl}(\lambda)$ auch alle Differentialquotienten $\Delta'_{xl}(\lambda)$ *oder* nicht alle $\Delta'_{xl}(\lambda)$.

6. Das Verschwinden der $\Delta'_{xl}(\lambda)$. Nun ist z. B. aus:

$$(17) \qquad \Delta_{12}(\lambda) = -\begin{vmatrix} a_{21} - \lambda b_{21} & a_{23} - \lambda b_{23} & a_{24} - \lambda b_{24} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & a_{33} - \lambda b_{33} & a_{34} - \lambda b_{34} \\ a_{41} - \lambda b_{41} & a_{43} - \lambda b_{43} & a_{44} - \lambda b_{44} \end{vmatrix}$$

der Differentialquotient:

$$(18) \qquad \begin{aligned} \Delta'_{12}(\lambda) = {} & b_{21}\delta_{66}(\lambda) - b_{23}\delta_{64}(\lambda) - b_{24}\delta_{62}(\lambda) \\ & - b_{31}\delta_{56}(\lambda) + b_{33}\delta_{54}(\lambda) + b_{34}\delta_{52}(\lambda) \\ & + b_{41}\delta_{16}(\lambda) - b_{43}\delta_{14}(\lambda) - b_{44}\delta_{12}(\lambda) \end{aligned}$$

oder nach (14) mit Weglassung des Index m:

$$(19) \qquad \begin{aligned} \Delta'_{12}(\lambda) = {} & b_{21}q_6q_6 - b_{23}q_6q_4 - b_{24}q_6q_2 \\ & - b_{31}q_5q_6 + b_{33}q_5q_4 + b_{34}q_5q_2 \\ & + b_{41}q_1q_6 - b_{43}q_1q_4 - b_{44}q_1q_2 \end{aligned}$$

oder, wenn u und v irgend zwei durch die Achse q gehende Ebenen sind:

$$(20) \qquad \Delta'_{12}(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} & b_{24} & u_2 & v_2 \\ b_{31} & b_{33} & b_{34} & u_3 & v_3 \\ b_{41} & b_{43} & b_{44} & u_4 & v_4 \\ u_1 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ v_1 & v_3 & v_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -B_{12}^{uv}$$

und so allgemein:

$$(21) \qquad \Delta'_{xl}(\lambda_i) = -B_{xl}^{uv},$$

wo B_{xl}^{uv} die Unterdeterminante von b_{xl} in der zweifach geränderten Determinante:

$$(22) \qquad B^{uv} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & u_1 & v_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & u_2 & v_2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & u_3 & v_3 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & u_4 & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

bedeutet. Die 10 Gleichungen:

$$B_{\varkappa\lambda}^{uv} = 0 \tag{23}$$

sind aber gerade die überzähligen Bedingungen dafür, daß $q = u \times v$ eine *Erzeugende* der Fläche g ist[1]), wonach sie mit ihrer reziproken Polaren q' ganz zusammenfällt. Es folgt somit im Anschluß an Satz I:

II. *Gehört zu einer vierfachen Wurzel* λ_1 *von* $\Delta(\lambda)$ *eine Reihe von Hauptpunkten* $x^{(1)}\ldots$ *und ein Büschel von Hauptebenen* $u^{(1)}\ldots$ $(l_1 = 4, l_1' = 2, 1, l_1'' = 0)$, *so fallen Reihe* p *und Büschelachse* p' *ganz zusammen, wenn alle* $\Delta'_{\varkappa\lambda}(\lambda_1) = 0$ *sind* $(l_1' = 2)$, *während sie sonst* $(l_1' = 1)$ *nur einen Punkt gemein haben.*

7. Weitere Folgen. Im Falle $l_1 = 4$, $l_1' = 2$, $l_1'' = 0$ fallen also die zur Wurzel λ_1 gehörige Hauptpunktreihe p und die Achse p' des entsprechenden Hauptebenenbüschels in einer Erzeugenden der Fläche g zusammen. Nach dem Begriff des Hauptpunktes gehört diese Erzeugende auch der Fläche f an und haben f und g in jedem Punkte dieser gemeinsamen Erzeugenden dieselbe Tangentialebene.

Da die Hauptpunktreihe zugleich die Doppellinie des Ebenenpaares $f - \lambda_1 g = 0$ ist, so ist diese Doppellinie eine Erzeugende der Fläche g, so daß jede der beiden Ebenen des Paares die Fläche g außer in dieser Erzeugenden noch in einer anderen Geraden schneidet und beide *Ebenen des Paares Tangentialebenen* der Fläche g sind. Die Grundkurve $f \times g$ oder $f - \lambda_1 g \times g$ des Büschels besteht daher aus einer doppelt zählenden Geraden und zwei windschiefen, jene schneidenden Geraden [2]).

Im Falle $l_1 = 4$, $l_1' = 1$, $l_1'' = 0$ haben Hauptpunktreihe p und Achse p' des Hauptebenenbüschels nur einen Punkt gemein und sind in diesem konjugierte Tangenten beider Flächen f und g. Nach den *Lürothschen* Sätzen [2]) über die Simultaninvarianten von f und g muß aber bei einer vierfachen Wurzel λ_1 $(l_1 = 4, l_1' = 2, 1, l_1'' = 0)$ die Achse des Ebenenpaares $f - \lambda_1 g = 0$ Tangente und wenigstens *eine der beiden Ebenen des Paares Tangentialebene* von g sein. Daher besteht die Grundkurve $f - \lambda_1 g \times g$ aus einem Geradenpaar und einem durch dessen Doppelpunkt gehenden eigentlichen Kegelschnitt [3]).

8. Hauptpunkte bei zwei Korrelationen. Bei zwei Korrelationen oder reziproken Verwandtschaften zweier Räume x, u und x', u':

$$f(x', x) = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa' x_\lambda = 0, \quad g(x', x) = \sum_1^4 \sum_1^4 b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa' x_\lambda = 0 \tag{24}$$

verstehen wir unter einem *Hauptpunkt* x des ersten Raumes einen solchen Punkt, dem in *beiden* Korrelationen dieselbe Gegenebene u' des zweiten Raumes entspricht und unter einem *Hauptpunkt* x' des zweiten Raumes einen solchen Punkt, dem in *beiden* Korrelationen dieselbe Gegenebene u des ersten Raumes entspricht. Die *Hauptebenen* u und u' haben als Gegenebenen von Hauptpunkten die dual entsprechende Bedeutung.

---

[1]) *Staude* II, S. 803, (19); (39).
[2]) *Heffter*, a. a. O. S. 384.
[3]) *Lüroth*, Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), S. 408.

Die Hauptpunkte bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$(25)\quad \sum_1^4{}^{l}(a_{\varkappa l}-\lambda_i b_{\varkappa l})x_l^{(i)}=0,\ \varkappa=1,2,3,4;\quad \sum_1^4{}^{\varkappa}(a_{\varkappa l}-\lambda_i b_{\varkappa l})x_\varkappa'^{(i)}=0,\ l=1,2,3,4,$$

wo λ_i eine Wurzel der Gleichung:

$$(26)\qquad \Delta(\lambda)=|a_{\varkappa l}-\lambda b_{\varkappa l}|=0$$

ist. Zu jedem Hauptpunkt $x^{(i)}, x'^{(i)}$ gehört dann als Gegenebene eine Hauptebene $u'^{(i)}, u^{(i)}$.

9. Hauptpunktreihen. Wenn für die Wurzel λ_i nicht alle Unterdeterminanten $\Delta_{\varkappa l}(\lambda)$ verschwinden, also $l_i'=0$ ist, gehört zu λ_i ein bestimmter Hauptpunkt in jedem der beiden Räume. Wenn aber $l_i'>0$, $l_i''=0$ ist, gehört zur Wurzel λ_i eine *Hauptpunktreihe* in jedem Raume. Für die Achsenkoordinaten q und q' dieser Reihen ist entsprechend (7):

$$(27)\quad \begin{cases} q_1:q_2:q_3:q_4:q_5:q_6=\delta_{\varkappa 1}(\lambda_i):\delta_{\varkappa 2}(\lambda_i):\delta_{\varkappa 3}(\lambda_i):\delta_{\varkappa 4}(\lambda_i):\delta_{\varkappa 5}(\lambda_i):\delta_{\varkappa 6}(\lambda_i), \\ q_1':q_2':q_3':q_4':q_5':q_6'=\delta_{1l}(\lambda_i):\delta_{2l}(\lambda_i):\delta_{3l}(\lambda_i):\delta_{4l}(\lambda_i):\delta_{5l}(\lambda_i):\delta_{6l}(\lambda_i), \end{cases}$$

$\varkappa, l=1,2,\ldots$ oder 6.

Jeder Punkt einer solchen Reihe hat in beiden Korrelationen dieselbe Gegenebene und die beiden Büschel dieser Gegenebenen sind die zu λ_i gehörigen *Hauptebenenbüschel.* Die Reihen und die Büschelachsen sind Hauptgerade.

10. Hauptgerade. Im allgemeinen ist nämlich eine Gerade p des ersten Raumes eine *Hauptgerade*, wenn ihr in *beiden* Korrelationen dieselbe Gegengerade p' im zweiten Raume entspricht, die dann ihrerseits eine Hauptgerade des zweiten Raumes ist. Die Hauptgeraden beider Räume bestimmen sich aus den Gleichungen, entsprechend (8):

$$(28)\quad \sum_1^6{}^{l}(a_{\varkappa l}-\varrho\beta_{\varkappa l})p_l=0,\ \varkappa=1,\ldots,6;\quad \sum_1^6{}^{\varkappa}(a_{\varkappa l}-\varrho\beta_{\varkappa l})p_\varkappa'=0,\ l=1,\ldots,6,$$

wo ϱ eine Wurzel der Gleichung:

$$(29)\qquad \Theta(\varrho)=|a_{\varkappa l}-\varrho\beta_{\varkappa l}|=0$$

ist. Ist $p^{(m)}$ die zur Wurzel ϱ_m gehörige Hauptgerade des ersten Raumes, so ist ihre Gegengerade, entsprechend (10):

$$(30)\qquad p_{\overline{\varkappa}}'^{(r)}=\sum_1^6{}^{l}a_{\varkappa l}p_l^{(m)}=\varrho_m\sum_1^6{}^{l}\beta_{\varkappa l}p_l^{(m)}.$$

Sie gehört, wie hier nur kurz bemerkt sei, zur reziproken Wurzel $\varrho_r=\dfrac{A}{B\varrho_m}$. Durch Multiplikation mit der zu ϱ_m gehörigen Hauptgeraden des zweiten Raumes $p'^{(m)}$ und Summation über $\varkappa$ folgt aus (30):

$$\sum_1^6{}^{\varkappa}p_\varkappa'^{(m)}p_{\overline{\varkappa}}'^{(r)}=\sum_1^6{}^{\varkappa}\sum_1^6{}^{l}a_{\varkappa l}p_\varkappa'^{(m)}p_l^{(m)}=\varrho_m\sum_1^6{}^{\varkappa}\sum_1^6{}^{l}\beta_{\varkappa l}p_\varkappa'^{(m)}p_l^{(m)}$$

und mit den allgemeinen Abkürzungen:

(31) $$\varphi_{m'n} = \sum_1^6 \sum_1^6 a_{\varkappa\lambda} p_\varkappa^{\prime(m)} p_\lambda^{(n)}, \qquad \psi_{m'n} = \sum_1^6 \sum_1^6 \beta_{\varkappa\lambda} p_\varkappa^{\prime(m)} p_\lambda^{(n)}$$

geschrieben:

$$\varphi_{m'm} = \varrho_m \psi_{m'm} = \sum_1^6 p_\varkappa^{\prime(m)} p_{\bar\varkappa}^{\prime(r)}.$$

Dieselbe Betrachtung führt mit Vertauschung beider Räume zu der Formel:

$$\varphi_{m'm} = \varrho_m \psi_{m'm} = \sum_1^6 p_\varkappa^{(m)} p_{\bar\varkappa}^{\prime(r)}$$

und damit zu dem Satze:

Sind $p^{(m)}$ und $p'^{(m)}$ die zur Wurzel ϱ_m gehörigen Hauptgeraden beider Räume und $p'^{(r)}$ und $p^{(r)}$ die entsprechenden des jedesmal andern Raumes, so ist:

(32) $$\varphi_{m'm} = \varrho_m \psi_{m'm} = \sum_1^6 p_\varkappa^{\prime(m)} p_{\bar\varkappa}^{\prime(r)} = \sum_1^6 p_\varkappa^{(m)} p_{\bar\varkappa}^{(r)}.$$

11. Zwei- oder mehrfache Wurzeln. Gehört nun zur Wurzel $\lambda = \lambda_i$ in jedem der beiden Räume eine Hauptpunktreihe q und q', so folgt aus (27), wie in (14), bis auf einen Proportionalitätsfaktor:

(33) $$q_\varkappa^{\prime(m)} q_\lambda^{(m)} = \delta_{\varkappa\lambda}(\lambda_i),$$

wo der Index m andeutet, daß die Hauptpunktreihen als Hauptgerade zur Wurzel ϱ_m gehören. Damit wird dann nach (13) wie bei (16):

(34) $$q_m \Delta''(\lambda_i) = \varphi_{m'm} = \varrho_m \psi_{m'm} = \sum_1^6 p_\varkappa^{\prime(m)} p_{\bar\varkappa}^{\prime(r)} = \sum_1^6 p_\varkappa^{(m)} p_{\bar\varkappa}^{(r)},$$

woraus folgt:

I. *Gehört zu einer Wurzel λ_i in jedem der beiden Räume eine Hauptpunktreihe $p^{(m)} = x^{(i)} \ldots$, $p'^{(m)} = x'^{(i)} \ldots$ und ein Hauptebenenbüschel $p'^{(r)} = u'^{(i)} \ldots$, $p^{(r)} = u^{(i)} \ldots$, so liegen beiderseits Reihe und Büschelachse $p^{(m)}$ und $p^{(r)}$, $p'^{(m)}$ und $p'^{(r)}$ windschief oder vereinigt, je nachdem λ_i eine zweifache ($l_i = 2$) oder mehrfache Wurzel ($l_i = 3, 4$) ist.*

Es bleibt dann, wie unter **5**, die Frage offen, ob bei vereinigter Lage Reihe und Büschelachse ganz zusammenfallen oder nur einen Punkt gemein haben. Wir untersuchen daraufhin die Fälle $l_1 = 4$, $l_1' = 2$ *oder* 1, $l_1'' = 0$. Der Fall $l_1 = 3$, $l_1' = 2$, $l_1'' = 0$ kommt nach der Theorie der Elementarteiler nicht vor.

12. Umformung der $\Delta'_{\varkappa\lambda}(\lambda)$. Wie von (17) auf (19) ergibt sich auch hier mit Rücksicht auf (33) mit Unterdrückung des Index m:

(35)
$$\begin{aligned}
\Delta'_{22}(\lambda_i) = &- b_{11} q'_6 q_6 + b_{13} q'_6 q_4 + b_{14} q'_6 q_2 + b_{31} q'_4 q_6 - b_{33} q'_4 q_4 - b_{34} q'_4 q_2 \\
&+ b_{41} q'_2 q_6 - b_{43} q'_2 q_4 - b_{44} q'_2 q_2, \\
\Delta'_{33}(\lambda_i) = &- b_{11} q'_5 q_5 + b_{12} q'_5 q_4 - b_{14} q'_5 q_3 + b_{21} q'_4 q_5 - b_{22} q'_4 q_4 + b_{24} q'_4 q_3 \\
&- b_{41} q'_3 q_5 + b_{42} q'_3 q_4 - b_{44} q'_3 q_3, \\
\Delta'_{23}(\lambda_i) = &\quad b_{11} q'_6 q_5 - b_{12} q'_6 q_4 + b_{14} q'_6 q_3 - b_{31} q'_4 q_5 + b_{32} q'_4 q_4 - b_{34} q'_4 q_3 \\
&- b_{41} q'_2 q_5 + b_{42} q'_2 q_4 - b_{44} q'_2 q_3, \\
\Delta'_{32}(\lambda_i) = &\quad b_{11} q'_5 q_6 - b_{13} q'_5 q_4 - b_{14} q'_5 q_2 - b_{21} q'_4 q_6 + b_{23} q'_4 q_4 + b_{24} q'_4 q_2 \\
&+ b_{41} q'_3 q_6 - b_{43} q'_3 q_4 - b_{44} q'_3 q_2.
\end{aligned}$$

Um das Gesetz dieser Darstellung zu erhalten, denken wir uns die Geraden q und q' je als Durchschnitt zweier Ebenen u, v und u', v' bestimmt und bilden die Determinante:

$$(36) \qquad B^{q'q} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & u'_1 & v'_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & u'_2 & v'_2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & u'_3 & v'_3 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & u'_4 & v'_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dann gibt die Entwicklung der Unterdeterminante $B^{q'q}_{\varkappa\lambda}$ des Elementes $b_{\varkappa\lambda}$ aus (36) z. B.:

$$(37) \quad B^{q'q}_{22} = b_{11}q'_6q_6 + b_{33}q'_4q_4 + b_{44}q'_2q_2 - b_{31}q'_4q_6 - b_{13}q'_6q_4 - b_{14}q'_6q_2 \\ - b_{41}q'_2q_6 + b_{34}q'_4q_2 + b_{43}q'_2q_4 = -\Delta'_{22}(\lambda_i)$$

und so allgemein:

$$(38) \qquad \Delta'_{\varkappa\lambda}(\lambda_i) = -B^{q'q}_{\varkappa\lambda}.$$

II. *Wenn also für eine Wurzel λ_i nicht nur alle $\Delta_{\varkappa\lambda}(\lambda)$, sondern auch alle $\Delta'_{\varkappa\lambda}(\lambda)$ verschwinden, aber nicht alle $\delta_{\varkappa\lambda}(\lambda)$, so ist dies gleichbedeutend damit, daß für die Hauptpunktreihen $p^{(m)} = q^{(m)} = x^{(i)} \ldots = u \times v$ und $p'^{(m)} = q'^{(m)} = x'^{(i)} \ldots = u' \times v'$ alle 16 Unterdeterminanten $B^{q'q}_{\varkappa\lambda}$ der Elemente $b_{\varkappa\lambda}$ der Determinante* (36) *verschwinden.*

13. Das Verschwinden der $B^{q'q}_{\varkappa\lambda}$. Besteht die Gleichung $g(x', x) = 0$ der zweiten Korrelation (24) zwischen den Punkten x' und x, so liegt jeder auf der Gegenebene des andern. Ist daher diese Gleichung identisch erfüllt für alle Punkte x einer Geraden q und alle Punkte x' einer Geraden q', so gehen die Gegenebenen aller Punkte x durch die Gerade q' und die Gegenebenen aller Punkte x' durch die Gerade q, d. h. die Gerade q' ist die Achse des Ebenenbüschels, welches der Punktreihe q, und die Gerade q die Achse des Ebenenbüschels, welches der Punktreihe q' vermöge der Korrelation $g(x', x) = 0$ entspricht.

Nimmt man nun als Gleichungen der Geraden q und q' in laufenden Koordinaten x und x' die beiden[1]):

$$(39) \quad \begin{cases} q_4x_1 = -q_5x_2 - q_6x_3 \\ q_4x_4 = -q_3x_2 + q_2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} q'_4x'_1 = -q'_5x'_2 - q'_6x'_3 \\ q'_4x'_4 = -q'_3x'_2 + q'_2x'_3 \end{cases}$$

und verlangt, daß die Gleichung:

$$(40) \qquad g(x', x) = \sum_1^4 \sum_1^4 b_{\varkappa\lambda}x'_\varkappa x_\lambda = 0$$

für alle Punkte x' und x der beiden Geraden identisch erfüllt wird, so muß die durch Einsetzen der Werte (39) für x_1, x_4, x'_1, x'_4 in (40) entstehende Gleichung in den noch übrigen Koordinaten x_2, x_3, x'_2, x'_3 identisch erfüllt sein. Sie nimmt aber dann mit Rücksicht auf (37) die Form an:

---

[1]) *Staude* I, S. 323, (9).

$$B_{33}^{q'q} x_2' x_2 + B_{22}^{q'q} x_3' x_3 - B_{32}^{q'q} x_2' x_3 - B_{23}^{q'q} x_3' x_2 = 0, \tag{41}$$

so daß sein muß:

$$B_{33}^{q'q} = 0, \quad B_{22}^{q'q} = 0, \quad B_{32}^{q'q} = 0, \quad B_{23}^{q'q} = 0. \tag{42}$$

Indem man dann statt (29) die andern gleichberechtigten Gleichungen [1]) der Geraden q und q' nimmt, ergibt sich so allgemein:

III. *Dann und nur dann, wenn die 16 überzähligen Bedingungen:*

$$B_{\varkappa l}^{q'q} = 0 \tag{43}$$

erfüllt sind, ist die Punktreihe q' die Achse des Ebenenbüschels, welches in der Korrelation (40) *der Punktreihe q entspricht, und die Punktreihe q die Achse des Ebenenbüschels, welches der Punktreihe q' entspricht, d. h. q und q' sind Gegengerade in der Korrelation* (40).

14. Vereinigung der Sätze I—III. Gehört nun, wie in Satz I, zur Wurzel λ_i in jedem der beiden Räume eine Hauptpunktreihe $p^{(m)} = q^{(m)}$ und $p'^{(m)} = q'^{(m)}$ und ein Hauptebenenbüschel mit den Achsen $p'^{(r)} = q'^{(r)}$ und $p^{(r)} = q^{(r)}$, wobei $q^{(m)}$ und $q'^{(r)}$, sowie $q'^{(m)}$ und $q^{(r)}$ Gegengerade sind, so ist die Bedingung $l_i' = 2$ nach Satz II gleichbedeutend mit dem Verschwinden aller 16 $B_{\varkappa l}^{q'^{(m)} q^{(m)}}$. Dann sind aber nach Satz III $q^{(m)}$ und $q'^{(m)}$ Gegengerade und fällt $q^{(m)}$ mit $q^{(r)}$, $q'^{(m)}$ mit $q'^{(r)}$ zusammen. Also:

IV. *Je nachdem $l_i = 4$, $l_i' = 2$, $l_i'' = 0$ oder $l_i = 3, 4$, $l_i' = 1$, $l_i'' = 0$ ist, fallen in beiden Räumen Hauptpunktreihe und Hauptebenenbüschelachse $p^{(m)}$ und $p^{(r)}$, $p'^{(m)}$ und $p'^{(r)}$ bei ihrer vereinigten Lage ganz zusammen oder haben nur einen Punkt gemein.*

15. Die kanonischen Gleichungen des Flächenbüschels. Daß die *Hauptgeraden* für das Flächenbüschel (2) eine gewisse Bedeutung haben, tritt bei der Betrachtung der 5 Formen *kanonischer Gleichungen* für die 13 Formen des Büschels hervor. Diese Gleichungen lauten [2]) bei Einführung geeigneter Koordinatentetraeder mit den Ecken I_1, I_2, I_3, I_4 und den gegenüberliegenden Seitenflächen i_1, i_2, i_3, i_4:

I.
$$\begin{cases} f = \lambda_1 g_{11} y_1^2 + \lambda_2 g_{22} y_2^2 + \lambda_3 g_{33} y_3^2 + \lambda_4 g_{44} y_4^2 = 0 \\ g = \quad g_{11} y_1^2 + \quad g_{22} y_2^2 + \quad g_{33} y_3^2 + \quad g_{44} y_4^2 = 0. \end{cases}$$

II
$$\begin{cases} f = \lambda_2 g_{22} y_2^2 + \quad f_{33} y_3^2 + \lambda_4 g_{44} y_4^2 + 2\lambda_1 g_{31} y_3 y_1 = 0 \\ g = \quad g_{22} y_2^2 + \quad g_{33} y_3^2 + g_{44} y_2^4 \quad + 2 \quad g_{31} y_3 y_1 = 0 \\ \qquad\qquad f_{33} - \lambda_1 g_{33} \neq 0. \end{cases}$$

III
$$\begin{cases} f = f_{33} y_3^2 + f_{44} y_4^2 + 2\lambda_2 g_{23} y_2 y_3 + 2\lambda_1 g_{14} y_1 y_4 = 0 \\ g = g_{33} y_3^2 + g_{44} y_4^2 + 2 \quad g_{23} y_2 y_3 + 2 \quad g_{14} y_1 y_4 = 0 \\ \qquad f_{33} - \lambda_2 g_{33} \neq 0, \quad f_{44} - \lambda_1 g_{44} \neq 0. \end{cases}$$

---

[1]) *Staude* I, S. 323, (9).

[2]) Enzyklopädie der Math. III 2, S. 217, Anm. 337—341; *Heffter*, a. a. O. S. 388 f.

$$\text{IV}\quad\begin{cases} f = \lambda_2 g_{22} y_2^2 + \lambda_1 g_{44} y_4^2 + 2\lambda_1 g_{31} y_3 y_1 + 2 f_{34} y_3 y_4 = 0 \\ g = \quad g_{22} y_2^2 + \quad g_{44} y_4^2 + 2 \quad g_{31} y_3 y_1 + 2 g_{34} y_3 y_4 = 0 \\ \qquad\qquad f_{34} - \lambda_1 g_{34} \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{V}\quad\begin{cases} f = f_{44} y_4^2 + 2 f_{23} y_2 y_3 + 2\lambda_1 g_{31} y_3 y_1 + 2\lambda_1 g_{24} y_2 y_4 = 0 \\ g = g_{44} y_4^2 + 2 g_{23} y_2 y_3 + 2 \quad g_{31} y_3 y_1 + 2 \quad g_{24} y_2 y_4 = 0 \\ \qquad f_{44} - \lambda_1 g_{44} \neq 0, \qquad f_{23} - \lambda_1 g_{23} \neq 0. \end{cases}$$

Im Falle I sind alle *vier Ecken* Hauptpunkte und alle *vier Seitenflächen* Hauptebenen und zwar I_1 und i_1, I_2 und i_2, I_3 und i_3, I_4 und i_4 als Pol und Polarebenen in bezug auf beide Flächen f und g zusammengehörig, ferner alle *sechs Kanten* Hauptgerade und zwar $I_2 I_3$ und $I_1 I_4$, $I_3 I_1$ und $I_2 I_4$, $I_1 I_2$ und $I_3 I_4$ als reziproke Polaren zusammengehörig.

Im Falle II sind *drei Ecken* Hauptpunkte und *drei Seitenflächen* Hauptebenen und zwar I_1 und i_3, I_2 und i_2, I_4 und i_4 zusammengehörig, ferner *vier Kanten* Hauptgerade und zwar $I_3 I_1$ und $I_2 I_4$ als reziproke Polaren, $I_1 I_2$ und $I_1 I_4$ als konjugierte Tangenten zusammengehörig.

Im Falle III sind *zwei Ecken* Hauptpunkte und *zwei Seitenflächen* Hauptebenen und zwar I_1 und i_4, I_2 und i_3 zusammengehörig, ferner *drei Kanten* Hauptgerade und zwar $I_2 I_3$ und $I_1 I_4$ als reziproke Polaren zusammengehörig und $I_1 I_2$ als Erzeugende sich selbst entsprechend.

Im Falle IV sind *zwei Ecken* Hauptpunkte und *zwei Seitenflächen* Hauptebenen und zwar I_1 und i_3, I_2 und i_2 zusammengehörig, ferner *zwei Kanten* Hauptgerade und zwar $I_1 I_2$ und $I_1 I_4$ als konjugierte Tangenten zusammengehörig.

Im Falle V ist *eine Ecke* I_1 Hauptpunkt und *eine Seitenfläche* i_3 Hauptebene und *eine Kante* $I_1 I_2$ Hauptgerade, sich selbst entsprechend.

Die Verschiedenheit der Fälle III und IV liegt also besonders in der verschiedenen Zahl der *Hauptgeraden.*

16. Hauptgerade im Falle $l_1 = 4$, $l_1' = 2$, $l_1'' = 0$. Bei der Form III mit $\lambda_2 = \lambda_1$ ist die Kante $I_1 I_2$ die zur vierfachen Wurzel gehörige Hauptpunktreihe und die Achse des Hauptebenenbüschels (vgl. 7). Zu einem beliebigen Punkte $I' = y_1', y_2', 0, 0$ dieser Kante gehört für *beide* Flächen f und g die Polarebene und Tangentialebene:

$$g_{23} y_2' y_3 + g_{14} y_1' y_4 = 0, \tag{44}$$

insbesondere zum Punkte I_1 die Ebene i_4, zum Punkte I_2 die Ebene i_3. Die Gleichungen (8) der Hauptgeraden werden im neuen Tetraeder $I_1 I_2 I_3 I_4$, wenn die Strahlenkoordinaten hier mit r bezeichnet werden:

$$(45)\quad\begin{cases} -g_{23}^2(\lambda_1^2 - \varrho) r_1 = 0, \quad g_{23} g_{14}(\lambda_1^2 - \varrho) r_5 + g_{14}(\lambda_1 f_{33} - \varrho g_{33}) r_6 = 0, \\ -g_{23} g_{14}(\lambda_1^2 - \varrho) r_6 = 0, \quad -g_{14}^2(\lambda_1^2 - \varrho) r_4 = 0, \quad g_{23} g_{14}(\lambda_1^2 - \varrho) r_2 \\ \qquad\qquad + g_{23}(\lambda_1 f_{44} - \varrho g_{44}) r_6 = 0, \\ g_{14}(\lambda_1 f_{33} - \varrho g_{33}) r_2 - g_{23} g_{14}(\lambda_1^2 - \varrho) r_3 + g_{23}(\lambda_1 f_{44} - \varrho g_{44}) r_5 \\ \qquad\qquad + (f_{33} f_{44} - \varrho g_{33} g_{44}) r_6 = 0. \end{cases}$$

Für die einzige Wurzel $\varrho = \lambda_1^2$ der Gleichung (9) folgt hiernach mit Rücksicht auf die Voraussetzungen $f_{33} - \lambda_1 g_{33} \neq 0$, $f_{44} - \lambda_1 g_{44} \neq 0$:

(46) $$r_6 = 0, \quad g_{14}(f_{33} - \lambda_1 g_{33})r_2 + g_{23}(f_{44} - \lambda_1 g_{44})r_5 = 0,$$

wozu noch die Bedingung: $r_1 r_4 + r_2 r_5 = 0$ hinzutritt.

Es gibt also ∞^2 *Hauptgerade*, die wegen $r_6 = 0$ *alle die Kante* $I_1 I_2$ *schneiden.* Aber nicht jede die Kante $I_1 I_2$ schneidende Gerade ist Hauptgerade.

17. Hauptgeradenebenen. Wir fragen daher, welche durch einen beliebigen Punkt $I' = y_1', y_2', 0, 0$ der Kante $I_1 I_2$ gehenden Geraden Hauptgeraden sind. Ist $I = y_1, y_2, y_3, y_4$ ein beliebiger Punkt einer durch I' gehenden Geraden, so sind deren Strahlenkoordinaten:

(47) $$r_1 = y_2' y_3, \quad r_2 = -y_1' y_3, \quad r_3 = y_1' y_2 - y_2' y_1, \quad r_4 = y_1' y_4, \quad r_5 = y_2' y_4, \quad r_6 = 0.$$

Soll diese Gerade den Gleichungen (46) genügen, muß sein:

(48) $$g_{14}(f_{33} - \lambda_1 g_{33}) y_1' y_3 - g_{23}(f_{44} - \lambda_1 g_{44}) y_2' y_4 = 0.$$

Alle durch den Punkt I' *gehenden Hauptgeraden liegen also in der durch die Kante* $I_1 I_2$ *gehenden Ebene* (48), der „*Hauptgeradenebene*“ von I', und jede in dieser Ebene durch I' gehende Gerade ist Hauptgerade.

Diese Ebene (48) ist aber nach (44) die Polarebene des Punktes:

(49) $$I'' : y_1'' = g_{23}^2(f_{44} - \lambda_1 g_{44}) y_2', \quad y_2'' = -g_{14}^2(f_{33} - \lambda_1 g_{33}) y_1', \quad y_3'' = 0, \quad y_4'' = 0,$$

der mit I' in der Beziehung steht:

(50) $$g_{14}^2(f_{33} - \lambda_1 g_{33}) y_1' y_1'' + g_{23}^2(f_{44} - \lambda_1 g_{44}) y_2' y_2'' = 0.$$

Da diese Gleichung in I' und I'' symmetrisch ist, so folgt:

Je zwei durch die Gleichung (50) *verbundene Punkte der Kante* $I_1 I_2$ *stehen in der Beziehung, daß die Polarebene des einen die Hauptgeradenebene des andern ist.*

Insbesondere gilt dies von den beiden *als Ecken* I_1 *und* I_2 *gewählten* Punkten der Hauptpunktreihe $I_1 I_2$. Die durch I_1 gehenden Hauptgeraden liegen nach (48) in der Polarebene i_3 von I_2 und die durch I_2 gehenden Hauptgeraden in der Polarebene i_4 von I_1.

18. Entsprechende Hauptgerade. Eine durch I_1 in i_3 gehende Gerade, welche die Kante $I_2 I_4$ in $I_0 = 0, y_2^0, 0, y_4^0$ schneidet, hat die Gleichung:

(51) $$y_4^0 y_2 - y_2^0 y_4 = 0, \quad y_3 = 0.$$

Die Polarebenen von I_1 und I_0 in bezug auf g sind:

$$y_4 = 0, \quad g_{14} y_4^0 y_1 + g_{23} y_2^0 y_3 + g_{44} y_4^0 y_4 = 0,$$

also ist die reziproke Polare von (51) in bezug auf g *und* f:

(52) $$g_{14} y_4^0 y_1 + g_{23} y_2^0 y_3 = 0, \quad y_4 = 0.$$

Der durch I_1 *in* i_3 *gehenden Hauptgeraden* (51) *entspricht als reziproke Polare die durch* I_2 *in* i_4 *gehende Hauptgerade* (52).

Insbesondere für $y_2^0 = 0$, $y_4^0 = 1$ sind bei der für **15,** III getroffenen Wahl des Koordinatentetraeders die Kanten $I_1 I_4$ und $I_2 I_3$ Hauptgerade und reziproke Polaren. Für $y_2^0 = 1$, $y_4^0 = 0$ ergibt sich die Kante $I_1 I_2$ als Hauptgerade und ihre eigene reziproke Polare.

Die beiden Ebenen (44) und (48) fallen nur zusammen, wenn:

$$g_{14}^2(f_{33} - \lambda_1 g_{33})y_1'^2 + g_{23}^2(f_{44} - \lambda_1 g_{44})y_2'^2 = 0. \tag{53}$$

Auf der Kante I_1I_2 gibt es also zwei bestimmte Punkte, in denen die gemeinsame Tangentialebene der beiden Flächen f und g zugleich die Ebene der Hauptgeraden ist, die durch einen solchen Punkt gehen. Diese Hauptgeraden entsprechen sich dann paarweise als konjugierte Tangenten beider Flächen und unter diesen befinden sich zwei zusammenfallende Paare, die gemeinsame Erzeugende beider Flächen sind. Da aber zu diesen jedesmal die Kante I_1I_2 gehört, so folgt:

Unter allen durch die einzelnen Punkte der Kante I_1I_2 büschelweise hindurchgehenden Hauptgeraden befinden sich, außer der Kante I_1I_2 selbst, noch zwei, die sich selbst entsprechen und daher gemeinsame Erzeugende der beiden Grundflächen sind.

Metazyklische Minimalbasis und komplexe Primzahlen.[1])

Von *Samson Breuer* in Karlsruhe i. B.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit führt die Frage nach der Existenz von für die Anwendungen besonders geeigneten metazyklischen Minimalbasen von Primzahlgrad auf Fragen von rein *zahlentheoretischer* Natur zurück. Unter einer „*metazyklischen* (zyklischen, halbmetazyklischen, vollmetazyklischen usw.) *Minimalbasis vom oder für den Primzahlgrad p*“ versteht man p algebraisch unabhängige rationale Funktionen von p Unbestimmten x_ν, die sämtlich dem Invariantenkörper der betreffenden metazyklischen Permutationsgruppe des Grades p angehören und diesen Körper erzeugen. Man nennt sie überdies rational, wenn ihre Koeffizienten einem vorgelegten, i. a. dem absoluten Rationalitätsbereich $\Re_0$ angehören. Die Bedeutung einer solchen Minimalbasis liegt darin, daß sie *einmal* erlaubt, über einem beliebigen endlichen algebraischen Zahlkörper alle *Galois*schen Körper der entsprechenden Gruppe zu bilden, und daß sie *ferner* die Möglichkeit gibt, die Koeffizienten der auflösbaren Gleichungen p-ten Grades, diese *nach ihren Galoisschen Gruppen getrennt*, durch p unabhängige Parameter darzustellen.

Im § 1 wird nach Erklärung der angewandten Bezeichnungen ein vom Verfasser schon früher[2]) abgeleiteter Satz erweitert bei wesentlicher Vereinfachung der Beweisführung. Durch birationale Transformation der Unbestimmten x_ν wird nämlich der Körper $\Re((x))$ aller rationalen Funktionen der Unbestimmten x_ν in zwei Teile *gespalten*, deren einer von $n+1$ vollmetazyklischen Funktionen der x_ν abhängt und also ein Unterkörper *sämtlicher* metazyklischer Invariantenkörper ist. Daher braucht weiterhin nur noch der zweite, von n „Unbestimmten“ abhängende Teilkörper betrachtet, d. h. es brauchen für sämtliche metazyklischen Minimalbasen nur noch je n weitere Basisfunktionen bestimmt zu werden.

Im § 2 wird untersucht, wann diese Aufgabe auf die Bestimmung der Minimalbasen für die *zyklischen* Permutationsgruppen $2n$-ten bzw. n-ten Grades zurückgeführt und so eine „*spezielle Minimalbasis erster Art*“ bestimmt werden kann.

---

[1]) Über einen Teil dieser Arbeit hat der Verfasser auf der Naturforscher-Versammlung in Innsbruck 1924 vorgetragen.

[2]) *Breuer*, *Zur Bestimmung der metazyklischen Minimalbasis von Primzahlgrad*, Mathematische Annalen **92**, 1924; im folgenden zitiert mit *B.*

Dies ist dann und nur dann möglich, wenn *erstens* p als Norm einer „komplexen Primzahl" im Körper der $p-1$-ten Einheitswurzeln dargestellt werden kann, und wenn *zweitens* im gleichen Körper eine komplexe Einheit von bestimmten Eigenschaften existiert. Die letztere Bedingung fällt bei den sogenannten „*Fermat*schen Primzahlen" fort; sie ist *stets* erfüllt, wenn $\frac{p-1}{2}$ gleichfalls eine Primzahl ist.

Im § 3 wird untersucht, wann diese Reduktion auf die zyklischen Minimalbasen $2n$-ten Grades *ohne die Zerspaltung* des § 1 vorgenommen und eine für die Anwendungen, namentlich auf die Theorie der Gleichungen, noch mehr geeignete, weil vollkommen symmetrisch gebaute, „*spezielle Minimalbasis zweiter Art*" bestimmt werden kann. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn nicht nur die Bedingungen für die Existenz einer „speziellen Minimalbasis erster Art" erfüllt sind, sondern weiterhin auch noch im Körper der $\frac{p-1}{2}$-ten Einheitswurzeln eine komplexe Einheit von bestimmten Eigenschaften existiert.

Im § 4 werden die vorhergehenden Untersuchungen an einer Reihe von Beispielen ($p = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$) erläutert und angewandt.

§ 1. Bezeichnungen; Reduktion auf n Unbestimmte.

Im folgenden bezeichne $p = 2n+1$ eine Primzahl, ε eine primitive p-te Einheitswurzel, g eine primitive Kongruenzwurzel von p; ε und g seien beliebig, aber fest gewählt. (Im § 4 wählen wir für g stets die kleinste positive primitive Kongruenzwurzel von p.) Die auftretenden Indizes sollen folgende Werte durchlaufen: $j, h = 0, 1, \ldots, n-1$; $t = 1, 2, \ldots, n-1$; $\mu = 0, 1, \ldots, p-2$; $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$. Mit α_j bezeichnen wir die n-ten Wurzeln der Einheit, mit α irgendeine unter ihnen; desgleichen mit β_j und β die n-ten Wurzeln der negativen Einheit; ϑ_μ bzw. ϑ sei die gemeinsame Bezeichnung für beide, d. h. für die $2n$-ten Wurzeln der Einheit. Mit x_ν bezeichnen wir p Unbestimmte. Ist dann

$$(1) \qquad \varphi_0((x))^{1}) = \frac{1}{p}\,(x_0 + x_1 + \cdots + x_{p-1})$$

und

$$(2) \qquad k_\mu = \frac{1}{p}\,(x_0 + \varepsilon^{g^\mu} x_1 + \varepsilon^{2g^\mu} x_2 + \cdots + \varepsilon^{(p-1)g^\mu} x_{p-1}),$$

so ergibt die Auflösung dieser p Gleichungen nach den x_ν:

$$(3) \quad x_\nu = \varepsilon^{-\nu} k_0 + \varepsilon^{-g\cdot\nu} k_1 + \varepsilon^{-g^2\cdot\nu} k_2 + \cdots + \varepsilon^{-g^{p-2}\cdot\nu} k_{p-2} + \varphi_0((x)).$$

Weiter sei

$$(4) \qquad q_j = \frac{k_{n+j}}{k_j}, \quad r_j = \frac{q_j - 1}{q_j + 1}; \quad \zeta_j = \varepsilon^{g^j} - \varepsilon^{-g^j}\ ^{2})\ ^{3}).$$

---

[1]) Mit (x) kürzen wir in üblicher Weise $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ ab, also $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ mit $\varphi((x))$.

[2]) Die in *B.* mit r_j bezeichneten Größen $\frac{k_j}{k_0}$ treten hier nicht auf; die Größen $\frac{q_j-1}{q_j+1}$ sind dort, im § 2, nur für spezielle Werte von p eingeführt und anders bezeichnet; für ζ_j ist ebendort η_j gesetzt.

[3]) Die Indizes der (x) sind auf den kleinsten nicht negativen Rest (mod p) zu reduzieren, desgleichen die der (k), (q), (r) und der nachher einzuführenden (v) (mod $2n$); überdies ist für

Wir bezeichnen ferner die erzeugenden Elemente der vollen linearen (oder metazyklischen) Permutationsgruppe mit

$$(5) \qquad S = (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}), \qquad T = (x_1, x_g, x_{g^2}, \ldots, x_{g^{p-2}})\ ^{1}).$$

Ersetzt man in den Koeffizienten einer Funktion der (x) die Einheitswurzel ε durch ε^g — wobei diese beiden Größen also nicht etwa *gegenseitig* vertauscht werden —, so bezeichnen wir diese Operation mit E. Eine Funktion der (k), der (q) oder der (r) ist nach (2) und (4) stets auch eine solche der (x). Wir bezeichnen sie als eine S-Funktion oder $ST^{\varkappa}$-Funktion der (k) usw., wenn sie die Vertauschung S bzw. S und $T^{\varkappa}$ duldet; dabei sei $\varkappa$ irgendein Teiler von $2n$, die Teiler 1 und $2n$ mit eingeschlossen. Wir betrachten im folgenden ausschließlich rationale Funktionen der (x), (k) usw. Wo wir eine Funktion ausdrücklich als rational bezeichnen, wollen wir damit sagen, daß auch ihre Koeffizienten dem zugrundegelegten Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$ bzw., wo nichts anderes gesagt ist, dem absoluten Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}_0$ entstammen, wenn man sie, mit Hilfe von (2) und (4), als Funktion der (x) schreibt. Nun geht k_μ bei Anwendung von S in $\varepsilon^{-g^\mu} k_\mu$ über, desgleichen q_j in $\varepsilon^{2g^j} q_j$, da $g^n \equiv -1 \pmod p$ ist. Mithin ist die Funktion

$$(6) \qquad v_0 = k_0^{\lambda_0} k_1^{\lambda_1} \cdots k_{p-2}^{\lambda_{p-2}}$$

dann und nur dann eine S-Funktion, wenn

$$(7) \qquad \lambda_0 + g^1\lambda_1 + g^2\lambda_2 + \cdots + g^{p-2}\lambda_{p-2} \equiv 0 \pmod p \text{ ist,}$$

desgleichen

$$(8) \qquad \psi_0 = q_0^{l_0} q_1^{l_1} \cdots q_{n-1}^{l_{n-1}}$$

dann und nur dann, wenn

$$(9) \qquad l_0 + g^1 l_1 + g^2 l_2 + \cdots + g^{n-1} l_{n-1} \equiv 0 \pmod p \text{ ist.}$$

Mit v_0 und ψ_0 dulden auch die Funktionen v_μ und ψ_j [2]) die Vertauschung S, welche aus ihnen durch die wiederholten zyklischen Vertauschungen

$$(10) \quad (k_0, k_1, \ldots, k_{p-2}) \text{ bzw. } (q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, q_0^{-1}, q_1^{-1}, \ldots, q_{n-1}^{-1})$$

hervorgehen. Eben diese Vertauschungen werden aber unter den (k) und (q) durch E oder durch T^{-1} hervorgerufen. Bei den v_μ und ψ_j bewirken also E oder T^{-1} die Vertauschungen $\binom{v_\mu}{v_{\mu+1}}$ bzw. $\binom{\psi_\mu}{\psi_{\mu+1}}$ oder ausführlich geschrieben

$$(11) \quad (v_0, v_1, \ldots, v_{p-2}) \text{ bzw. } (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}, \psi_0^{-1}, \psi_1^{-1}, \ldots, \psi_{n-1}^{-1}).$$

---

q_{n+j} sinngemäß q_j^{-1} zu setzen und für r_{n+j} entsprechend $-r_j$; ebenso ist $\zeta_{n+j} = -\zeta_j$, da $g^{n+j} \equiv -g^j \pmod p$ ist. Bei dieser Interpretation können wir also auch von den $2n$ Größen η_μ, r_μ, ζ_μ und weiterhin ψ_μ, χ_μ sprechen.

[1]) Siehe Fußnote 3) auf Seite 14.

[2]) Die verschiedene Bezeichnung bei den v_μ und ψ_j rührt davon her, daß zwar aus v_0 durch (10) $2n$ wesentlich verschiedene Funktionen hervorgehen, aus ψ_0 aber nur n, da $\psi_{n+j} = \psi_j^{-1}$ wird; vgl. Fußnote 3) auf Seite 14 und Formel (11). Ähnliches gilt für die χ_j, wegen $\chi_{n+j} = -\chi_j$; vergleiche (13).

Nun ist eine Funktion der (k), (q) usw. dann und nur dann in dem oben definierten Sinne rational, wenn sie E duldet. Die zyklischen, d. h. gegenüber (11) invarianten Funktionen der (v) und (ψ) sind daher, vorausgesetzt, daß ihre einzelnen Glieder die Bedingung (7) bzw. (9) erfüllen, rationale vollmetazyklische Funktionen der (x). Umgekehrt können alle rationalen metazyklischen Funktionen aus φ_0 (1) und Funktionen der Form v_μ (6) bzw. zyklischen Verbindungen der v_μ erzeugt werden[1]). Was wir suchen, sind $p-1$ solche Funktionen, die jeweils zusammen mit φ_0 den gerade betrachteten metazyklischen Körper erzeugen. Ehe wir uns diesem Problem selbst zuwenden, führen wir nun noch die Größen

$$\chi_j = \frac{\psi_j - 1}{\psi_j + 1} \tag{12}$$

ein und bemerken, daß die r_j (4) und χ_j (12) durch E oder T^{-1}, d. h. durch (10) bzw. (11) die gleiche Vertauschung, nämlich $\binom{r_\mu}{r_{\mu+1}}$ bzw. $\binom{\chi_\mu}{\chi_{\mu+1}}$ oder

$$\begin{aligned}&(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}, -r_0, -r_1, \ldots, -r_{n-1}) \quad \text{bzw.}\\ &(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}, -\chi_0, -\chi_1, \ldots, -\chi_{n-1})\end{aligned} \tag{13}$$

erfahren.

Die Aufsuchung der metazyklischen Minimalbasen wird nun, gleichzeitig für alle metazyklischen Körper des Primzahlgrades p, wesentlich vereinfacht durch den folgenden

Satz 1: Der Körper $\Re((x))$[2]) läßt sich durch birationale Transformation der Unbestimmten (x) in zwei Körper $\Re(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ und $\Re(Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1})$ zerlegen, deren einer von $n+1$ vollmetazyklischen Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ der (x) erzeugt wird.

Es möge noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die Funktionen (φ) und (Q), ebenso wie die beiden Zerlegungskörper, ε nicht enthalten. Der Körper $\Re((\varphi))$ ist also in allen metazyklischen Körpern enthalten. Um von dem Körper $\Re((x))$ zu den *einzelnen* metazyklischen Körpern zu gelangen, brauchen wir *daher nur noch den Körper* $\Re((Q))$ *schrittweise einzuschränken*, d. h. wir müssen seine erzeugenden n Elemente (Q) durch genau n S-Funktionen bzw. ST^x-Funktionen usw. der (Q) ersetzen, die den Körper aller S-Funktionen usw. der (Q) erzeugen und also zusammen mit den ein für allemal bestimmten Funktionen (φ) die gesuchte Minimalbasis bilden.

Die in obigem Satze erwähnte birationale Transformation kann durch folgende Gleichungen vermittelt werden:

$$\varphi_0 = \sum_0^{p-1} x^\nu; \quad \varphi_{j+1} = \sum_0^{n-1} (q_h^{jp+n+1} + q_h^{-jp-n}) k_h; \quad Q_j = \sum_0^{n-1} \zeta_h r_{j+h}. \tag{14}$$

Beweis: Zunächst erkennt man bei Beachtung von (4), (13) und Fußnote 3) S. 14 sofort, daß Q_j, wie verlangt, eine „rationale" Funktion der (x) ist, da die

---

[1]) Vgl. *Weber, Lehrbuch der Algebra*, 2. Aufl. (1898), I. §§ 191, 192.

[2]) Mit $\Re((x))$ bezeichnen wir den Körper aller rationalen Funktionen der (x), deren Koeffizienten einem *beliebig* vorgegebenen Rationalitätsbereich $\Re$ entstammen.

n Glieder dieser Summe durch E nur zyklisch (ohne Vorzeichenänderung!) vertauscht werden. Da ferner $q_h^{-jp-n} k_h = k_{n+h}^{-jp-n} k_h^{jp+n+1} = q_{n+h}^{jp+n+1} k_{n+h}$ ist, so können wir auch schreiben: $\varphi_{j+1} = \sum_0^{p-2} q_\mu^{jp+n+1} k_\mu$. In dieser Form erkennt man, daß φ_{j+1} die Vertauschungen (10), d. h. T und E duldet. Da aber das Leitglied auch die Bedingung (7) erfüllt, so ist φ_{j+1}, wie verlangt, eine rationale vollmetazyklische Funktion der (x); das gleiche gilt selbstverständlich für φ_0. Wir haben nun noch zu zeigen, daß die Gleichungen (14) auch rational nach den (x) aufgelöst werden können. Dazu genügt es im Hinblick auf (3), wenn wir zeigen, daß erstens das Gleichungssystem (14, 3) nach den r_h aufgelöst werden kann, womit nach (4) auch die $q_h = \frac{1 + r_h}{1 - r_h}$ bekannt sind, und daß weiter das System (14, 2) nach den k_h, d. h. den n Größen $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$, aufgelöst werden kann: d. h. wir müssen zeigen, daß die Determinanten dieser Systeme nicht *identisch* für alle Werte der Unbestimmten (x) bzw. (q) verschwinden [1]).

Bezeichnen wir für den Augenblick $q_h^{\frac{p}{2}} = s_h$, $(s_h + s_h^{-1})^2 = u_h$, so können wir die Determinante D_1 von (14, 2) folgendermaßen umformen:

$$D_1 = \{ q_h^{jp+n+1} + q_h^{-jp-n} \} = (q_0 q_1 \cdots q_{n-1})^{\frac{1}{2}} \{ q_h^{jp+n+\frac{1}{2}} + q_h^{-jp-n-\frac{1}{2}} \}$$
$$= (q_0 q_1 \cdots q_{n-1})^{\frac{1}{2}} \{ s_h^{2j+1} + s_h^{-2j-1} \}.$$

Nun ist aber

$$(s_h + s_h^{-1})^{2j+1} = (s_h^{2j+1} + s_h^{-2j-1}) + \binom{2j+1}{1} (s_h^{2j-1} + s_h^{-2j+1})$$
$$+ \binom{2j+1}{2} (s_h^{2j-3} + s_h^{-2j+3}) + \cdots + \binom{2j+1}{j} (s_h + s_h^{-1}).$$

Mithin kann man die Determinante $\{ s_h^{2j+1} + s_h^{-2j-1} \}$ durch Addition geeigneter Vielfacher darüberstehender Zeilen, von der untersten an angefangen, in die Form bringen:

$$\{ s_h^{2j+1} + s_h^{-2j-1} \} = \{ (s_h + s_h^{-1})^{2j+1} \} = \{ u_h^{j+\frac{1}{2}} \} = (u_0 u_1 \cdots u_{n-1})^{\frac{1}{2}} \{ u_h^j \}$$
$$(h, j = 0, 1, \ldots, n-1) \qquad = (u_0 u_1 \cdots u_{n-1})^{\frac{1}{2}} \Delta u_h,$$

wo Δu_h das Differenzenprodukt der u_h bedeutet. Mithin wird

$$D_1 = \Pi q_h^{\frac{1}{2}} \cdot \Pi (q_h^{\frac{p}{2}} + q_h^{-\frac{p}{2}}) \cdot \Delta (q_h^{\frac{p}{2}} + q_h^{-\frac{p}{2}})^2 = \Pi (q_h^{n+1} + q_h^{-n}) \cdot \Delta (q_h^{\frac{p}{2}} + q_h^{-\frac{p}{2}})^2,$$

also *nicht* identisch Null.

Die Determinante D_2 von (14, 3) hängt überhaupt nicht von den (x) ab; ihr Zahlenwert ist leicht zu berechnen. Schreibt man nämlich (14, 3) ausführlich und setzt für r_{n+j} wieder $-r_j$, so wird

---

[1]) Daß die Auflösung von (14) nach den (x), sofern sie überhaupt möglich ist, nur Koeffizienten aus $\mathfrak{R}_0$ enthält, folgt daraus, daß wie vorher gezeigt, für (14) selbst das gleiche gilt.

$$
\begin{aligned}
Q_0 &= \zeta_0 r_0 + \zeta_1 r_1 + \zeta_2 r_2 + \cdots + \zeta_j r_j + \cdots + \zeta_{n-1} r_{n-1} \\
Q_1 &= -\zeta_{n-1} r_0 + \zeta_0 r_1 + \zeta_1 r_2 + \cdots + \zeta_{j-1} r_j + \cdots + \zeta_{n-2} r_{n-1} \\
&\cdots\cdots\cdots

Mithin wird für $n = 2m$ durch Einsetzen von (17) in (16) erhalten $D_2 = (-p)^m$; für $n = 2m + 1$ dagegen $D_2 = (-p)^m \cdot \sqrt{-p}$; also allgemein $D_2 = (-p)^{\frac{n}{2}} \neq 0$, w. z. b. w.

§ 2. Spezielle Minimalbasen erster Art; Zusammenhang mit den komplexen Primzahlen.

Wir haben nunmehr die Körper der ST^x-Funktionen der (Q) zu betrachten und für sie Minimalbasen zu suchen. Statt dessen können wir auch — und das trifft den Kern der Aufgabe — die Körper der „*rationalen*“ ST^x*-Funktionen der* (q) betrachten und für *diese* die Minimalbasen suchen, denn der Körper $\Re((q))$ entsteht aus $\Re((Q))$ durch Adjunktion von ε. Alle S-Funktionen der (q) überhaupt lassen sich aus *solchen* Funktionen ψ_j (8) zusammensetzen, welche die Bedingung (9) erfüllen. Eine Minimalbasis für diese Funktionen ψ_j wird nun z. B. durch die n Funktionen

$$q_0^p, \quad q_t q_0^{-g^t} \tag{18}$$

gebildet, denn diese Funktionen erfüllen (9), und nach Adjunktion der einen p-ten Wurzel q_0 sind alle q_j bekannt. Es ist sogar nicht schwer, aus (18) auch eine Minimalbasis für die ST^n-Funktionen der (q) zu gewinnen. Diese wird nämlich durch die Funktionen

$$\left(\frac{q_0^p - 1}{q_0^p + 1}\right)^2, \qquad \frac{q_0^p - 1}{q_0^p + 1} \cdot \frac{q_t q_0^{-g^t} - 1}{q_t q_0^{-g^t} + 1} \tag{19}$$

gebildet [1]). Aber der Lösung unserer eigentlichen Aufgabe kommen wir damit nur wenig näher. Denn die Funktionen (18) und (19) erleiden durch T oder E eine recht verwickelte Substitution, deren Invarianten jedenfalls nicht einfach zu bestimmen sind [2]). Wir können daher aus (18) und (19) unmittelbar weder eine Basis für die *rationalen* S-Funktionen der (q), noch eine solche für deren ST^x-Funktionen gewinnen. Dies wird aber wesentlich erleichtert, wenn es gelingt, die Basisfunktionen (19) durch n „*konjugierte*“ *Basisfunktionen* χ_j (12) zu ersetzen, die bei T^{-1} oder E nur die zyklische Vertauschung (13, 2) erleiden, d. h. wenn es gelingt, eine Funktion ψ_0 (8) zu finden, die zusammen mit den durch T^j aus ihr hervorgehenden Funktionen ψ_j eine Basis für die S-Funktionen der (q) bildet. Eine solche Basis wollen wir im folgenden kurz eine „*spezielle S-Basis erster Art*“ nennen. [Sie bildet *im* $\Re(\varepsilon)$ zusammen mit den φ_0, φ_{j+1} (14) eine zyklische Minimalbasis für die (x).] Aus einer speziellen S-Basis $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ können wir nun zunächst stets eine *rationale* S-Basis gewinnen, und zwar auf genau demselben Wege, wie wir oben von der Basis (q) der Funktionen der (q) überhaupt zu der Basis (Q) der *rationalen* Funktionen der (q) gelangt sind. Wir führen nämlich nach (12) die $\chi_j = \dfrac{\psi_j - 1}{\psi_j + 1}$ ein, die den r_j entsprechen, und erhalten ganz

---

[1]) Vergl. *B.* (16) und (18).

[2]) Vergl. *B.* § 1, Ende. Zu der Fußnote 9) daselbst ist zu bemerken, daß Herr *Beck*, nach einer freundlichen Mitteilung an den Verfasser, „glaubt beweisen zu können, daß *jede* Cremona-Transformation durch Wechsel des Raumelementes linear gemacht werden kann“.

analog zu (14, 3) die Größen

$$(20)\qquad {}^{i}\Psi_j = \sum_{0}^{n-1}{}_h\, \zeta_h \chi_{j+h} = -\zeta_{n-j}\chi_0 - \zeta_{n-j+1}\chi_1 - \zeta_{n-j+2}\chi_2 - \cdots - \zeta_{n-1}\chi_{j-1} + \zeta_0\chi_j + \zeta_1\chi_{j+1} + \cdots + \zeta_{n-j-1}\chi_{n-1},$$

die gleich den Q_j (14, 3; 15) gegen E invariant und also rational sind. Sie bilden mithin die gesuchte Minimalbasis für die *rationalen* S-Funktionen der (q) oder, was dasselbe ist, für die S-Funktionen der (Q); sie bilden zusammen mit den $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (14) die gesuchte *rationale* zyklische Minimalbasis für die Unbestimmten (x). Diese möge als „*spezielle zyklische Minimalbasis erster Art*" bezeichnet werden.

Die Größen ${}^{i}\Psi_j$ (20) erleiden nun nach (13) durch T^{-1} die Vertauschung

$$(21)\qquad U = ({}^{i}\Psi_0, {}^{i}\Psi_1, \ldots, {}^{i}\Psi_{n-1}, -{}^{i}\Psi_0, -{}^{i}\Psi_1, \ldots, -{}^{i}\Psi_{n-1}).$$

Die fernere Bestimmung der Minimalbasen für die $ST^{\varkappa}$-Funktionen der (Q) verlangt also nur noch das Aufsuchen von Minimalbasen für die Invariantenkörper, die zu den zyklischen, durch die Permutationen $U^{\varkappa}$ jeweils erzeugten Gruppen — den sämtlichen Untergruppen der durch U selbst erzeugten Gruppe — gehören, d. h. also das Aufsuchen von Minimalbasen für zyklische Permutationsgruppen $2n$-ten Grades in dem speziellen Fall, daß die Unbestimmten, von denen der Körper abhängt, paarweise entgegengesetzt gleich sind. Wenn nun n ungrade ist, so kann man diese Aufgabe leicht weiter auf das Aufsuchen der zyklischen Minimalbasen *n-ten* Grades reduzieren. Sei nämlich $n = 2m + 1$, und setzen wir

$$(22)\qquad {}^{i}\Psi_0{}^{i}\Psi_1 = \Omega_0,\ {}^{i}\Psi_1{}^{i}\Psi_2 = \Omega_1, \ldots, {}^{i}\Psi_j{}^{i}\Psi_{j+1} = \Omega_j, \ldots, {}^{i}\Psi_{n-2}{}^{i}\Psi_{n-1} = \Omega_{n-2},\ -{}^{i}\Psi_{n-1}{}^{i}\Psi_0 = \Omega_{n-1} = \Omega_{2m},$$

so erleiden die Größen Ω_j durch T^{-1} die Vertauschung

$$(23)\qquad O = (\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}).$$

Dann ist aber eine Minimalbasis der zu $O^{\varkappa} - \varkappa$ ein Teiler von n — gehörigen Funktionen der (Ω) zugleich eine Minimalbasis für die zu $U^{\varkappa}$ gehörigen Funktionen der (Ψ). Sie erzeugt nämlich nur solche Funktionen der (Ψ), die $U^{\varkappa}$ dulden, und der Körper der (Ψ) selbst ist vom Grade $\frac{2n}{\varkappa}$ über ihr, weil er vom zweiten Grade über dem der (Ω) ist. Dieses selbst endlich folgt aus der Gleichung

$$\Psi_0^2 = -\Omega_0\,\Omega_1^{-1}\Omega_2\,\Omega_3^{-1}\cdots\Omega_{2m-2}\Omega_{2m-1}^{-1}\,\Omega_{2m},$$

da aus (22) mit Ψ_0 alle Ψ_j rational bekannt sind [1]). Die zu $U^{2\varkappa}$ gehörige Minimalbasis ist gleichfalls leicht zu finden, da die Vertauschungen $U^{2\varkappa}$ und $O^{\varkappa}$ sich nur durch die Elemente unterscheiden, auf die sie sich beziehen. Wir erhalten somit den

Satz 2: Die Kenntnis einer speziellen S-Basis erster Art reduziert das Problem der Aufsuchung von Minimalbasen für

---

[1]) Vergl. *Breuer, Zyklische Gleichungen 6. Grades und Minimalbasis*, Mathematische Annalen **86**, 1922, S. 108 ff.

die metazyklischen Gruppen p-ten Grades auf das gleiche Problem bei den zyklischen (Permutations-)Gruppen $2n$-ten bzw. n-ten Grades.

Fragen wir daher jetzt, wann eine spezielle S-Basis erster Art existiert, so erkennen wir leicht: Dafür, daß die Funktionen ψ_j eine Basis für die S-Funktionen der (q) bilden, ist *notwendig und hinreichend*, daß die beiden Gleichungen

$$\psi_0^{s_0}\,\psi_1^{s_1}\cdots\psi_{n-1}^{s_{n-1}} = q_0^p \tag{24}$$

$$\psi_0^{t_0}\,\psi_1^{t_1}\cdots\psi_{n-1}^{t_{n-1}} = q_0^q\,q_1^{-1} \tag{25}$$

in ganzen Zahlen s_j, t_j erfüllbar sind. Dies ist *notwendig*, denn q_0^p und $q_0^q q_1^{-1}$ sind S-Funktionen, müssen also durch die ψ_j in dieser Weise darstellbar sein. Und es ist *hinreichend*, weil der Körper der (q) alsdann vom p-ten Grade über dem der (ψ) ist; denn nach Adjunktion von q_0 kennt man aus (25) auch q_1, und ebenso alle anderen q_j aus den Gleichungen, die durch wiederholte Anwendung von T auf (25) aus dieser hervorgehen. Setzt man in die linken Seiten von (24) und (25) für die ψ_j ihre Werte nach (8) ein, also

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= q_0^{l_0} q_1^{l_1}\cdots q_{n-2}^{l_{n-2}}\, q_{n-1}^{l_{n-1}}\\
\psi_1 &= q_0^{-l_{n-1}} q_1^{l_0}\cdots q_{n-2}^{l_{n-3}}\, q_{n-1}^{l_{n-2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\psi_{n-1} &= q_0^{-l_1} q_1^{-l_2}\cdots q_{n-2}^{-l_{n-1}}\, q_{n-1}^{l_0}
\end{aligned} \tag{26}$$

und setzt die Koeffizienten von q_j auf beiden Seiten von (24) und (25) je einander gleich, so liefern die Gleichungen (24) und (25) je n Gleichungen für die Zahlen s_j bzw. t_j, oder genauer gesagt: zwischen diesen Zahlen und den l_j, nämlich:

$$\begin{aligned}
&l_0 s_0 \;- l_1 s_{n-1} - l_2 s_{n-2} - \cdots - l_{n-1} s_1 = p\\
&l_0 s_1 \;+ l_1 s_0 \;- l_2 s_{n-1} - \cdots - l_{n-1} s_2 = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&l_0 s_{n-1} + l_1 s_{n-2} + l_2 s_{n-3} + \cdots + l_{n-1} s_0 = 0
\end{aligned} \tag{27}$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned}
&l_0 t_0 \;- l_1 t_{n-1} - l_2 t_{n-2} - \cdots - l_{n-1} t_1 = g\\
&l_0 t_1 \;+ l_1 t_0 \;- l_2 t_{n-1} - \cdots - l_{n-1} t_2 = -1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&l_0 t_{n-1} + l_1 t_{n-2} + l_2 t_{n-3} + \cdots + l_{n-1} t_0 = 0\,.
\end{aligned} \tag{28}$$

Die Zahlen l_j müssen, wie erinnerlich, noch die Bedingung (9) erfüllen. Unsere Frage lautet daher jetzt einfach so: *Wann existieren drei Systeme von je n ganzen Zahlen* (l), (s), (t), *die die Bedingungen* (9), (27), (28) *erfüllen*?

Hier ergibt sich nun ein enger Zusammenhang mit einer Frage, die am Eingang der Idealtheorie steht[1]), die selbst gerade *Kummer* in den Fällen, wo sie eine

---

[1]) Vergleiche die „*Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages E. Kummers* usw." herausgeg. vom Vorstand der Berliner Math. Ges., Leipzig u. Berlin 1910, S. 53 ff. (Briefe *Kummers* an *Kronecker*), sowie *Kummers Gratulationsschrift* zum Jubiläum der Königsberger Universität (1844), wiederabgedruckt unter dem Titel „*Sur les nombres complexes* etc." im Journal de mathématiques pures et appliquées, XII, 1847, p. 185—212.

negative Antwort fand, zur Schöpfung der „idealen Zahlen" geführt hat. [Wir werden es aber im Rahmen dieser Arbeit nur mit „realen Zahlen" zu tun haben, auf Fragen der Idealtheorie selbst überhaupt nicht eingehen und auch von ihrer Terminologie keinen Gebrauch machen.] Betrachten wir nämlich die beiden Kongruenzen

$$(29)\quad (l_0 + l_1 u + l_2 u^2 + \cdots + l_{n-1} u^{n-1})(s_0 + s_1 u + s_2 u^2 + \cdots + s_{n-1} u^{n-1}) \equiv p \pmod{u^n + 1},$$

$$(30)\quad (l_0 + l_1 u + l_2 u^2 + \cdots + l_{n-1} u^{n-1})(t_0 + t_1 u + t_2 u^2 + \cdots + t_{n-1} u^{n-1}) \equiv g - u \pmod{u^n + 1},$$

multiplizieren die linken Seiten aus, schaffen die n-ten und höheren Potenzen der Unbestimmten u weg und vergleichen die *Koeffizienten* gleich hoher Potenzen von u auf beiden Seiten jeder Kongruenz, so erhalten wir offenbar dieselben beiden Gleichungssysteme (27) und (28) wie vorhin beim Vergleich der *Exponenten* gleicher q_j auf beiden Seiten von (24) und (25). Wir führen nun noch zur Abkürzung die Bezeichnung

$$(31)\qquad l_0 + l_1 u + l_2 u^2 + \cdots + l_{n-1} u^{n-1} = l(u)$$

sowie die entsprechend erklärten Bezeichnungen $s(u)$, $t(u)$ ein. Dann sind die Gleichungen

$$(32)\qquad l(\beta) \cdot s(\beta) = p, \qquad l(\beta) \cdot t(\beta) = g - \beta$$

äquivalent mit den Gleichungen (29), (30), sobald wir vorschreiben, daß die Gleichungen (32) für *alle* n Wurzeln β der Gleichung $u^n + 1 = 0$ erfüllt sein sollen. *Die Existenz einer solchen Zerlegung* (32) *der ganzen algebraischen Zahlen* p *und* $g - \beta$, *zusammen mit der hier stets stillschweigend vorausgesetzten Erfüllung der Bedingung* (9), *ist also notwendig und hinreichend für die Existenz einer speziellen S-Basis.* Die Bedingung (9) können wir übrigens nach (31) jetzt auch in der Form schreiben:

$$(33)\qquad l(g) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Um nun die Bedingungen (32), (33) eingehender zu untersuchen, denken wir uns die Funktion $u^n + 1$ in ihre irreduzibelen Faktoren zerlegt:

$$(34)\qquad u^n + 1 = f(u) f_1(u) f_2(u) \cdots f_k(u) = f(u) \cdot F(u).$$

Dabei sei $f(u) = 0$ die „irreduzibele Kreisteilungsgleichung für den Grad $2n$", besitze also die primitiven $2n$-ten Einheitswurzeln als Wurzeln. Neben der Bezeichnung β für alle Wurzeln von $u^n + 1 = 0$ führen wir für die Wurzeln von $f(u) = 0$ die Bezeichnung γ, für die von $F(u) = 0$ die Bezeichnung δ ein. Sei nun

$$(35)\qquad 1 = \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_d = 2n - 1$$

ein vollständiges reduziertes Restsystem für den Modul $2n$, so sind alle Wurzeln von $f(u) = 0$ durch γ, γ^{ϱ_2}, γ^{ϱ_3}, $\ldots$, γ^{ϱ_d} dargestellt, desgleichen alle primitiven Kongruenzwurzeln von p durch g, g^{ϱ_2}, g^{ϱ_3}, $\ldots$, g^{ϱ_d}, wobei γ bzw. g eine beliebige unter ihnen ist. Aus der „vollständigen Zerlegung" der *Fermat*schen Funktion

$$u^{2n} - 1 \equiv (u-1)(u-2)\cdots(u-2n) \pmod{p}$$

erschließt man dann leicht die Kongruenz

$$(36) \qquad f(u) \equiv (u-g)(u-g^{\varrho_2})(u-g^{\varrho_3}) \cdots (u-g^{\varrho_d}) \pmod{p}.$$

Wir verstehen im folgenden unter m eine ganze positive Zahl von der Eigenschaft, daß $n = m(2k+1)$ ist und bezeichnen mit $N_f l(\beta)$, $N_F l(\beta)$, $N_m l(\beta)$ die Norm der algebraischen Zahl $l(\beta_j)$, je nachdem β_j alle γ[1]), alle δ, oder schließlich alle Wurzeln der Gleichung $u^m + 1 = 0$ durchläuft. Dann beweisen wir zunächst den

Satz 3: Aus den Gleichungen (32) bzw. den Kongruenzen (29, 30) nebst der Kongruenz (33) folgt

$$(37) \qquad N_f l(\beta) = p, \quad N_F l(\beta) = 1, \quad \text{bzw.}$$

$$(38) \qquad l(u) \cdot l(u^{\varrho_2}) \cdot l(u^{\varrho_3}) \cdots l(u^{\varrho_d}) \equiv p \pmod{f(u)} \text{ und } \equiv 1 \pmod{F(u)}.$$

Beweis: Zunächst folgt die Äquivalenz von (37, 1) mit (38, 1) unmittelbar aus dem zu (35) Bemerkten. Das vollständige reduzierte Restsystem (35) für den Modul $2n$ enthält weiter, wie man leicht zeigt, jede reduzierte Restklasse (mod $2m$) gleich oft für ein bestimmtes m von der oben bezeichneten Eigenschaft. Die Kongruenz (38, 2) folgt somit aus (37, 2) — bzw. den hierin enthaltenen Gleichungen $N_m l(\beta) = 1$, wo $m \neq n$ ist — für jeden Modul $u^m + 1$, und also auch für das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Moduln, eben für $F(u)$; ebenso folgt (37, 2) aus (38, 2).

Nun folgt aus (32) durch Bildung der Norm

$$N_m l(\beta) \cdot N_m s(\beta) = p^m, \quad N_m l(\beta) \cdot N_m t(\beta) = g^m + 1, \quad \text{folglich}$$

$$(39) \qquad N_m l(\beta) = p^e, \quad \text{wo} \quad 0 \leqq e \leqq m, \quad \text{und} \quad g^m + 1 \equiv 0 \pmod{p^e}.$$

Für $m < n$ muß also $e = 0$ sein, weil sonst (39, 2) der Voraussetzung widerspricht, daß g eine *primitive* Kongruenzwurzel von p ist; damit ist (37, 2) bewiesen. Wäre nun für $m = n$ ebenfalls $e = 0$, also $N_f l(\beta) \cdot N_F l(\beta) = 1$, und also auch $N_f l(\beta) = 1$, d. h.

$$l(u) \cdot l(u^{\varrho_2}) \cdot l(u^{\varrho_3}) \cdots l(u^{\varrho_d}) \equiv 1 \pmod{f(u)},$$

so folgte durch Einsetzen von g für u, unter Beachtung von (36):

$$l(g) \cdot l(g^{\varrho_2}) \cdot l(g^{\varrho_3}) \cdots l(g^{\varrho_d}) \equiv 1 \pmod{p}$$

im Widerspruch zu (33). Endlich folgt aus (32) noch $l(\beta)[s(\beta) + t(\beta)] = (p+g) - \beta$, also durch Normbildung

$$N_n l(\beta) N_n[s(\beta) + t(\beta)] = (p+g)^n + 1 \quad \text{und} \quad N_n l(\beta) \cdot N_n t(\beta) = g^n + 1,$$

$$(p+g)^n + 1 \equiv g^n + 1 \equiv 0 \pmod{N_n l(\beta)} \quad \text{und also} \quad \equiv 0 \pmod{p^e},$$

$$(p+g)^n - g^n \equiv 0 \pmod{p^e}, \quad \text{d. h.:}$$

$$p^n + \binom{n}{1} p^{n-1} g + \binom{n}{2} p^{n-2} g^2 + \cdots + \binom{n}{2} p^2 g^{n-2} + p g^{n-1} \equiv 0 \pmod{p^e},$$

folglich $e = 1$, w. z. b. w.

[Man erkennt übrigens auch, daß $l(\gamma)$ eine „komplexe Primzahl" ist — d. h. daß es keine Zerlegung gibt $l(\gamma) = L_1(\gamma) \cdot L_2(\gamma)$, wo L_1 und L_2 beide keine kom-

[1]) Statt $N_f l(\beta)$ schreiben wir daher auch gelegentlich einfach $Nl(\gamma)$, ebenso $Nl(\delta)$ statt $N_F l(\beta)$.

plexen Einheiten sind — und daß es eine *primitive* Größe von $\Re(\gamma)$ sein muß — d. h. daß nicht $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$ sein kann —, weil sonst $N_l l(\beta)$ zwei von 1 verschiedene Teiler haben müßte.]

Wir beweisen weiter als *Umkehrung* den

Satz 4: Gelten für eine ganze rationale Funktion $l(u)$ die Gleichungen (37) [oder die Kongruenzen (38)], so existieren eine primitive Kongruenzwurzel g von p, welche die Kongruenz (33) erfüllt, sowie zwei ganze rationale Funktionen $s(u)$, $t(u)$, die zusammen mit $l(u)$ die Gleichungen (32) [oder die Kongruenzen (29, 30)] erfüllen[1]).

Beweis: Aus (38, 1) folgt unter Beachtung von (36)

$$l(g) \cdot l(g^{\varrho_2}) \cdot l(g^{\varrho_3}) \cdots l(g^{\varrho_d}) \equiv 0 \pmod{p},$$

d. h. die Kongruenz (33) ist erfüllt für mindestens *ein* g, w. z. b. w. Es ist aber dieses g vor den anderen primitiven Kongruenzwurzeln von p keineswegs bevorzugt. Bezeichnen wir nämlich mit $l^{(\varrho_i)}(u)$ die (mod $u^n + 1$) auf den Grad $n - 1$ reduzierte Funktion $l(u^{\varrho_i})$, und wählen wir d Zahlen ν_i so aus, daß $\varrho_i \nu_i \equiv 1 \pmod{2n}$ wird, so sind (37, 38) wie für $l(u)$ so auch für jedes $l^{(\varrho_i)}(u)$ erfüllt, und für ein beliebiges ν_i ist $l^{(\varrho_i)}(g^{\nu_i}) \equiv 0 \pmod{p}$, weil $l(g) \equiv 0 \pmod{p}$ ist. Wir können daher bei der rechnerischen Behandlung für g eine beliebige, z. B. die kleinste positive primitive Kongruenzwurzel von p wählen.

Sei nunmehr $s^*(u)$ so als ganze rationale Funktion [von höchstens $n - 1$-tem Grade] gewählt, daß

$$s^*(u) \equiv l(u^{\varrho_2}) \cdot l(u^{\varrho_3}) \cdots l(u^{\varrho_d}) \pmod{u^n + 1} \tag{40}$$

ist, so folgt aus (38)

$$l(u) \cdot s^*(u) = p - G_0(u) \cdot f(u) = 1 - G_4(u) \cdot F(u), \tag{41}$$

wobei $G_0(u)$, $G_4(u)$ gewisse ganze rationale ganzzahlige Funktionen sind, zwischen denen die aus (41) folgende Beziehung besteht

$$G_0(u) \cdot f(u) - G_4(u) \cdot F(u) = 2n. \tag{42}$$

Wählen wir daher $s(u)$ als ganze rationale Funktion [von höchstens $n - 1$-tem Grade] so, daß

$$s(u) \equiv s^*(u)\,[p + 1 - l(u)\,s^*(u)] \pmod{u^n + 1} \tag{43}$$

ist, so wird

---

[1]) Ein Teil dieses Satzes ist für einen speziellen Fall bereits bei *Kummer* a. a. O. (s. Fußnote 1) S. 21) bewiesen. Dort wird nämlich mutatis mutandis gezeigt: Ist α eine primitive q-te Einheitswurzel, *wo aber q eine Primzahl ist*; ist ferner die Primzahl $p = 2mq + 1$ in der Form $p = Nl(\alpha)$ darstellbar: so ist $\xi - \alpha$ teilbar durch $l(\alpha)$, und $l(\xi)$ teilbar durch p, wobei ξ der Kongruenz $\xi^{q-1} + \xi^{q-2} + \cdots + \xi^2 + \xi + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ genügt. Der Beweis wird jedoch durch eine wesentlich umständlichere Rechnung erbracht als bei uns und läßt sich nicht auf den hier behandelten allgemeineren Fall übertragen. Ganz entsprechendes gilt für den weiter unten zu beweisenden Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit von p,

$l(u) \cdot s(u) \equiv l(u)\, s^*(u)\, [p + 1 - l(u)\, s^*(u)] \pmod{u^n + 1}$, also nach (41)
$\equiv [p - G_0(u) \cdot f(u)]\, [p + G_4(u) \cdot F(u)] \pmod{u^n + 1}$, daher nach (42) und (34)
$\equiv [p^2 - p \cdot 2n - G_0(u) \cdot G_4(u) \cdot (u^n + 1)] \pmod{u^n + 1}$, also wegen $2n = p - 1$

$$l(u) \cdot s(u) \equiv p \pmod{u^n + 1}, \tag{44}$$

d. h. $s(u)$ (43) ist die *eine* Funktion, deren Existenz zu beweisen war.

Setzen wir endlich

$$l^{(\varrho_i)}(u) = l^{(\varrho_i)}(g^{\nu_i}) + (u - g^{\nu_i}) \cdot l_{(1)}^{(\varrho_i)}(u), \tag{45}$$

so sind alle $l_{(1)}^{(\varrho_i)}(u)$ ganze rationale ganzzahlige Funktionen ihres Argumentes, und es wird, unter steter Verwendung nur solcher Funktionen, nach (40), und weil, wie vorhin erwähnt, $l^{(\varrho_i)}(g^{\nu_i}) \equiv 0 \pmod{p}$ ist,

$$s^*(u) \equiv -p\, P_1(u) - (u - g^{\nu_2})\, (u - g^{\nu_3}) \cdots (u - g^{\nu_d})\, P_2(u) \pmod{u^n + 1},$$

mithin

$(g - u)\, s^*(u) \equiv p(u - g)\, P_1(u) + (u - g)\, (u - g^{\nu_2})\, (u - g^{\nu_3}) \cdots (u - g^{\nu_d})\, P_2(u) \pmod{u^n + 1}$, also nach (36)
$\equiv p\, P_3(u) + f(u)\, P_2(u) \pmod{u^n + 1}$, daher nach (43, 41)
$(g - u)\, s(u) \equiv [p\, P_3(u) + f(u)\, P_2(u)][p + G_4(u)\, F(u)] \pmod{u^n + 1}$, also nach (34)

$$(g - u)\, s(u) \equiv p \cdot t(u) \pmod{u^n + 1}, \tag{46}$$

wo $t(u)$ eine (mod $u^n + 1$) wohlbestimmte ganze rationale ganzzahlige Funktion ist. Setzen wir aber hier für p nach (44) $l(u) \cdot s(u)$ ein und kürzen durch $s(u)$ — was erlaubt ist, weil $s(u)$ und $u^n + 1$ teilerfremd sind — so ergibt sich

$$g - u \equiv l(u) \cdot t(u) \pmod{u^n + 1},$$

d. h. $t(u)$ in (46) ist die *andere* Funktion, deren Existenz zu beweisen war.

Wir beweisen endlich noch den

Satz 5: Die Darstellung $p = l(\gamma) \cdot l^{(\varrho_2)}(\gamma) \cdot l^{(\varrho_3)}(\gamma) \cdots l^{(\varrho_d)}(\gamma)$ ist, wenn überhaupt, so im wesentlichen nur auf *eine* Art möglich.

„Im wesentlichen" soll dabei heißen: abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren und von Abänderungen einer Funktion $l^*(u)$ in die Form

$$l(u) = G_1(u) \cdot l^*(u) + G_2(u) \cdot f(u), \tag{47}$$

wobei $G_1(u)$, $G_2(u)$ ganze usw. Funktionen sind und $G_1(\gamma)$ *eine komplexe Einheit*, d. h. $NG_1(\gamma) = 1$ ist.

Beweis: Angenommen, es sei

$$p = l(\gamma) \cdot l^{(\varrho_2)}(\gamma) \cdots l^{(\varrho_d)}(\gamma) = k(\gamma) \cdot k^{(\varrho_2)}(\gamma) \cdots k^{(\varrho_d)}(\gamma),$$

so können wir annehmen, daß $k(u)$ die Bedingung (33) $k(g) \equiv 0 \pmod{p}$ für dieselbe Kongruenzwurzel g erfüllt wie $l(u)$. Setzen wir dann wie in (45) $k(u) = k(g) + (u - g)\, k_{(1)}(u)$, so wird ganz wie vorhin erhalten

$k(u) \cdot s^*(u) \equiv p \cdot P_4(u) \pmod{f(u)}$, also nach (41)
$\equiv l(u) \cdot s^*(u) \cdot P_4(u) \pmod{f(u)}$, also
$k(\gamma) = l(\gamma) \cdot P_4(\gamma)$.

Bildet man jetzt auf beiden Seiten die Norm über alle γ, so folgt

$$p = p \cdot NP_4(\gamma), \quad \text{folglich} \quad NP_4(\gamma) = 1, \quad \text{w. z. b. w.}$$

In Zusammenfassung der letzten Resultate gewinnen wir den folgenden

Satz 6: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer speziellen S-Basis erster Art sind

1. die Existenz einer ganzen rationalen ganzzahligen Funktion $l^*(u)$, die der Gleichung

(48) $$Nl^*(\gamma) = p$$

genügt, sonst aber beliebig ist;

2. die Existenz zweier ebensolcher Funktionen $G_1(u)$ und $G_2(u)$ der Art, daß

(49) $$NG_1(\gamma) = 1, \quad Nl(\delta) = 1$$ [1])

wird, wobei $l(u)$ durch (47) erklärt ist.

Die Funktionen $l^*(u)$, $G_1(u)$ können dabei von kleinerem Grade als $f(u)$, die Funktion $G_2(u)$ von kleinerem als $F(u)$ vorausgesetzt werden; $l(u)$ ist höchstens von $n-1$-tem Grade. Die Forderung (49) ist gleichbedeutend damit, daß $G_1(\gamma)$ und — für *jedes* δ — $l(\delta)$ komplexe Einheiten seien.

Der **Beweis** des Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Wir erwähnen nur noch, daß, wenn $G_1(u)$ und $G_2(u)$ die Bedingung (49) für irgendein $l^*(u)$ erfüllen, dann $G_1(u^\varrho)$ und $G_2(u^\varrho)$ das gleiche für $l^*(u^\varrho)$ leisten, daß es also gleichgültig ist, welchen der „konjugierten Teiler von p" man bevorzugen will. Die Beschränkung des Grades für $l(u)$ und $l^*(u)$ ist ohne weiteres verständlich. Setzt man weiter $G_1(u) = g_1(u)f(u) + G_1'(u)$ und $G_2(u) + g_1(u)l^*(u) = g_2(u)F(u) + G_2'(u)$, wo $G_1'(u)$ und $G_2'(u)$ den für $G_1(u)$ und $G_2(u)$ angegebenen Gradbeschränkungen genügen, so wird nach (47):

$$l(u) = G_1'(u)l^*(u) + G_2'(u)f(u) + g_2(u)(u^n + 1),$$

so daß man, was ja vorausgesetzt ist, $l(u)$ nur (mod $u^n + 1$) zu reduzieren braucht, um jener Forderung zu genügen.

Eine allgemeine Untersuchung, für welche Primzahlen die Bedingungen (48) und (49) erfüllt sind, soll im Rahmen dieser Arbeit nicht angeschnitten werden. Für die Untersuchung der Bedingung (48) sei auf die mehrfach erwähnte *Kummer*sche Gratulationsschrift [2]) [3]) sowie auf das Vorwort der „Tafeln komplexer Prim-

---

[1]) Siehe Anm. 1) S. 23. [2]) Siehe Anm. 1) S. 21.

[3]) Daselbst ist bereits gezeigt, daß die Darstellung (48) nicht immer möglich ist. Für die Darstellung einer Primzahl $p = 2mq + 1$ — wo q eine Primzahl und α eine primitive q-te Einheitswurzel ist — in der Form $p = Nl(\alpha)$ wird nämlich als *notwendig* erkannt, daß $4p$ durch die quadratische Form $x^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} qy^2$ darstellbar sei, was bekanntlich durchaus nicht immer der Fall ist. (Vgl. auch *Bachmann*, Die Lehre von der Kreisteilung usw. Leipzig 1872, S. 256.) Für eine Reihe von Fällen, in denen diese Darstellung möglich ist, hat *Kummer* sie dortselbst angegeben, darunter auch die Zerlegung von 11 im Körper der 5-ten, von 23 in dem der 11-ten Einheitswurzel. Siehe auch weiter unten § 4.

zahlen" von *Reuschle* [1]) verwiesen. Diesen Tafeln entnehmen wir die Ausdrücke $l^*(\gamma)$ — die also z. T. erst noch gemäß (47) in $l(\gamma)$ umzuformen sein werden — für die weiter unten (§ 4) zu behandelnden Einzelfälle [2]). Wir erwähnen jedoch bereits hier, daß in den genannten Tafeln die Ausdrücke $l^*(\gamma)$ für die Primzahlen bis zu 43 einschließlich sowie für 61, 67, 71 angegeben sind, daß ferner für die meisten übrigen Primzahlen unter 200 dort bereits die Nicht-Existenz von $l^*(\gamma)$ festgestellt wird.

Hinsichtlich der Bedingung (49) begnügen wir uns hier mit dem Beweise des folgenden Satzes:

Satz 7: Bei den Primzahlen $p = 2^{2^b} + 1$ und $p = 2q + 1$, wo q gleichfalls Primzahl, ist die Möglichkeit der Zerlegung (48) allein notwendig und hinreichend für die Existenz einer speziellen S-Basis erster Art.

Beweis: Für $n = 2^{2^b - 1}$ ist $u^n + 1$ irreduzibel, es existieren also überhaupt keine Wurzeln δ, für die (49, 2) erfüllt sein müßte. Für $n = q$ wird

$$f(u) = u^{q-1} - u^{q-2} + u^{q-3} - \cdot + \cdots - u + 1, \quad F(u) = u + 1,$$

daher reduziert sich (49, 2) auf die Bedingung $l(-1) = 1$. Da ferner $f(-1) = q$ wird, so sind nur die Bedingungen

$$(50) \qquad G_1(-1) \cdot l^*(-1) + G_2(-1) \cdot q = 1, \quad NG_1(\gamma) = 1$$

zu erfüllen. Setzt man in der mit (48) äquivalenten Kongruenz (38, 1) $u = -1$ und beachtet, daß das Restsystem (35) hier durch 1, 3, 5, ..., $q - 2$, $q + 2$, ..., $2q - 1$ dargestellt ist, so ergibt sich

$$(51) \quad [l^*(-1)]^{q-1} \equiv p \pmod q \equiv 1 \pmod q, \text{ folglich } l^*(-1) = c \not\equiv 0 \pmod q.$$

Es existieren daher zwei ganze Zahlen $\pi > 0$ und ϱ derart, daß

$$(52) \qquad \pi c + \varrho q = 1$$

wird. Setzt man daher

$$(53) \quad G_1(u) = 1 - u + u^2 - \cdot + \cdots + (-u)^{\pi-1}, \quad G_2(u) = \varrho,$$

so ist zunächst (50, 1) erfüllt. Das gleiche gilt aber auch für (50, 2), denn es wird

$$(1 + \gamma) G_1(\gamma) = 1 - (-\gamma)^\pi = 1 + \gamma_1,$$

wo $\gamma_1 = -(-\gamma)^\pi$, einerlei, ob π gerade oder ungerade ist, ebenfalls eine primitive $2q$-te Einheitswurzel ist, weil nach (52) $\pi \not\equiv 0 \pmod q$. Daher wird wegen

$$N(1 + \gamma) NG_1(\gamma) = N(1 + \gamma_1) \quad \text{und} \quad N(1 + \gamma) = N(1 + \gamma_1)$$

erhalten: $NG_1(\gamma) = 1$, w. z. b. w.

§ 3. Spezielle Minimalbasen zweiter Art.

Die im Vorstehenden behandelten „speziellen zyklischen Minimalbasen erster Art" leiden an einem Übelstand, der sich insbesondere bei der Anwendung

---

[1]) *Tafeln komplexer Primzahlen* ... von *Dr. C. G. Reuschle.* Berlin 1875.

[2]) Für $p = 11$ und $p = 23$ sind sie bereits bei *Kummer* zu finden. Vgl. Fußnote 3) S. 26.

auf die auflösbaren Gleichungen sehr störend bemerkbar macht. Sie sind nämlich aus zwei völlig heterogenen Bestandteilen zusammengesetzt: sie enthalten einerseits die Funktionen φ_{j+1} (14, 2)[1]), andererseits aber die Funktionen ψ_j (26) bzw. die aus diesen abgeleiteten Ψ_j (20), die zwar untereinander konjugiert sind, mit den φ_{j+1} (14, 2) jedoch in keinem organischen Zusammenhange stehen. Wir stellen daher die Frage: Ist es nicht möglich, *ohne Einführung der* φ_{j+1} (14, 2), unmittelbar, zunächst im $\Re(\varepsilon)$, $2n$ „konjugierte" Funktionen v_μ anzugeben,

$$
\begin{aligned}
v_0 &= k_0^{\lambda_0} k_1^{\lambda_1} \cdots k_{2n-2}^{\lambda_{2n-2}} k_{2n-1}^{\lambda_{2n-1}} \\
v_1 &= k_1^{\lambda_0} k_2^{\lambda_1} \cdots k_{2n-1}^{\lambda_{2n-2}} k_0^{\lambda_{2n-1}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_n &= k_n^{\lambda_0} k_{n+1}^{\lambda_1} \cdots k_{n-2}^{\lambda_{2n-2}} k_{n-1}^{\lambda_{2n-1}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{2n-1} &= k_{2n-1}^{\lambda_0} k_0^{\lambda_1} \cdots k_{2n-3}^{\lambda_{2n-2}} k_{2n-2}^{\lambda_{2n-1}}
\end{aligned}
\tag{54}
$$

[vergleiche (6, 10)], die eine Basis für die S-Funktionen der k_μ bilden? Wenn das nämlich der Fall ist, so können wir in ganz analoger Weise, nur noch etwas kürzer, vorgehen wie im vorhergehenden Abschnitt. Da nämlich die v_μ, wie zu Beginn des § 1 erwähnt, durch E und T^{-1} nur die zyklische Vertauschung (11, 1) erleiden, so dulden die Funktionen

$$
V_\mu = \sum_0^{2n-1}{}_{\mu_1} \varepsilon^{g^{\mu_1-\mu+2n}} v_{\mu_1}{}^{2}) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, 2n-1) \tag{55}
$$

oder ausführlicher geschrieben

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \varepsilon^{g^0} v_0 + \varepsilon^{g^1} v_1 + \cdots + \varepsilon^{g^{2n-2}} v_{2n-2} + \varepsilon^{g^{2n-1}} v_{2n-1} \\
V_1 &= \varepsilon^{g^{2n-1}} v_0 + \varepsilon^{g^0} v_1 + \cdots + \varepsilon^{g^{2n-3}} v_{2n-2} + \varepsilon^{g^{2n-2}} v_{2n-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
V_{2n-1} &= \varepsilon^{g^1} v_0 + \varepsilon^{g^2} v_1 + \cdots + \varepsilon^{g^{2n-1}} v_{2n-2} + \varepsilon^{g^0} v_{2n-1}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

die Vertauschung E, sind also *rational.* Sie bilden aber überdies eine Basis für die rationalen S-Funktionen der k_μ, d. h. eben eine *rationale zyklische Minimalbasis*[1]), weil die Determinante D_3 von (56) nicht verschwindet, wie sich leicht zeigen läßt. Denn es ist nach (55)

$$
D_3 = \left| (\varepsilon^{g^{2n-\mu}})^{g^{\mu_1}} \right|, \qquad (\mu, \mu_1 = 0, 1, \ldots, 2n-1)
$$

wo die Zeilen mit μ, die Spalten mit μ_1 numeriert sind. Da aber $g^{2n-\mu}$ und g^{μ_1} beide (mod p) die Zahlen $1, 2, \ldots, 2n-1, 2n$ durchlaufen, so kann man nach geeigneter Vertauschung der Reihen auch schreiben:

---

[1]) Von der Funktion φ_0 (14, 1) wird hier des kürzeren Ausdruckes wegen abgesehen; sie ist stets zu den anderen Basisfunktionen mit hinzuzunehmen. Ihr besonderer Charakter bildet übrigens bei den Anwendungen kein störendes Moment.

[2]) Der Exponent von g soll auf den kleinsten nicht negativen Rest (mod $2n$) reduziert werden.

$$D_3 = \pm\,|\,(\varepsilon^{\mu'})^{\mu_1'}\,|\,\ldots\ldots\ldots

Satz 2 a: Die Kenntnis einer speziellen S-Basis zweiter Art reduziert das Problem der Aufsuchung von Minimalbasen für die metazyklischen Gruppen p-ten Grades *ohne Benutzung der Funktionen* φ_{j+1} (14) auf das gleiche Problem bei den zyklischen (Permutations-) Gruppen $2n$-ten bzw. n-ten Grades.

Eine Minimalbasis für die S-Funktionen der (k) wird nun — vergleiche das zu (18) Bemerkte — durch die $2n$ Funktionen

$$k_0^p, \quad k_0^{-g^{\bar{\mu}}} k_{\bar{\mu}} \qquad (\bar{\mu} = 1, 2, \ldots, p-2) \tag{18 a}$$

gebildet. Daher ergeben sich, wiederum analog zu dem, was bei (24, 25) ausgeführt wurde, als *notwendig und hinreichend* dafür, daß die v_μ (54) eine Basis für die S-Funktionen der (k) bilden, die beiden Bedingungen:

$$v_0^{\sigma_0} v_1^{\sigma_1} \cdots v_{2n-1}^{\sigma_{2n-1}} = k_0^p, \tag{24 a}$$

$$v_0^{\tau_0} v_1^{\tau_1} \cdots v_{2n-1}^{\tau_{2n-1}} = k_0^g k_1^{-1}, \tag{25 a}$$

während die Bedingung (7) an Stelle von (9) tritt. Führen wir daher zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \cdots + \lambda_{2n-1} u^{2n-1} = \lambda(u), \tag{31 a}$$

sowie für späteren Gebrauch

$$\bar{l}_0 + \bar{l}_1 u + \cdots + \bar{l}_{n-1} u^{n-1} = \bar{l}(u) \tag{31 b}$$

nebst den entsprechend erklärten Bezeichnungen $\sigma(u)$, $\tau(u)$ und $\bar{s}(u)$, $\bar{t}(u)$ ein, so erhalten wir auf dem Wege über Gleichungen (27 a, 28 a), die wir hier unterdrücken können, die Kongruenzen

$$\lambda(u) \cdot \sigma(u) \equiv p \pmod{u^{2n} - 1} \tag{29 a}$$

$$\lambda(u) \cdot \tau(u) \equiv g - u \pmod{u^{2n} - 1} \tag{30 a}$$

oder die für *alle* $2n$ Wurzeln ϑ_μ der Gleichung $u^{2n} - 1 = 0$ zu erfüllenden Gleichungen

$$\lambda(\vartheta) \cdot \sigma(\vartheta) = p, \qquad \lambda(\vartheta) \cdot \tau(\vartheta) = g - \vartheta \tag{32 a}$$

und die Kongruenz

$$\lambda(g) \equiv 0 \pmod{p} \tag{33 a}$$

als notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer speziellen S-Basis zweiter Art.

Setzen wir jetzt

$$\begin{aligned} \lambda_j - \lambda_{n+j} &= l_j, & \lambda_j + \lambda_{n+j} &= l_j \\ \sigma_j - \sigma_{n+j} &= s_j, & \sigma_j + \sigma_{n+j} &= \bar{s}_j \\ \tau_j - \tau_{n+j} &= t_j, & \tau_j + \tau_{n+j} &= \bar{t}_j, \end{aligned} \tag{59}$$

so folgt unter Beachtung von (31, 31 a, 31 b)

(60) $\bar{l}(u) \equiv l(u) \pmod 2$, $\bar{s}(u) \equiv s(u) \pmod 2$, $\bar{t}(u) \equiv t(u) \pmod 2$,

weil sonst die „Gleichungen" (59) keine ganzzahlige Auflösung nach den Größen $\lambda_\mu, \sigma_\mu, \tau_\mu$ hätten. Setzen wir daher

(61) $$\bar{l}(u) - l(u) = 2\,d(u)\,,$$

so wird

(62) $$\lambda(u) = l(u) + (u^n + 1)\,d(u) = \bar{l}(u) + (u^n - 1)\,d(u)\,.$$

Daher erhalten wir, unter Hinzufügung der entsprechenden Gleichungen für $\sigma(u)$ und $\tau(u)$:

(63)
$$\begin{aligned} \lambda(a) &= \bar{l}(a), & \lambda(\beta) &= l(\beta) \\ \sigma(a) &= \bar{s}(a), & \sigma(\beta) &= s(\beta) \\ \tau(a) &= \bar{t}(a), & \tau(\beta) &= t(\beta)\,. \end{aligned}$$

Endlich folgt aus (62, 1)

(64) $$\lambda(g) \equiv l(g) \pmod p\,.$$

Läßt man daher in (32 a) ϑ zunächst nur die Werte β_j durchlaufen, so gehen diese Gleichungen in (32) über, während (33 a) nach (64) mit (33) äquivalent ist, d. h.: *Für die Existenz einer speziellen S-Basis zweiter Art ist die einer solchen erster Art eine notwendige Voraussetzung.* In der Tat erkennt man, daß die Größen $\frac{v_{n+j}}{v_j}$, die ja in die Basis zweiter Art (54), etwa an Stelle der n letzten Funktionen v_{n+j}, eingeführt werden könnten, mit den Basisfunktionen ψ_j der Basis erster Art (26) übereinstimmen.

Wir lassen nun ϑ in (32 a) alle Werte a_j durchlaufen, und multiplizieren die so erhaltenen Gleichungen je miteinander. Es ergibt sich in leichtverständlicher Bezeichnung:

$$N_{u^n-1}\bar{l}(a) \cdot N_{u^n-1}\bar{s}(a) = p^n, \qquad N_{u^n-1}\bar{l}(a) \cdot N_{u^n-1}\bar{t}(a) = g^n - 1\,.$$

Ganz ähnlich wie bei (39) ergibt sich hieraus, da g eine primitive Kongruenzwurzel von p ist,

(65) $$N_{u^n-1}\bar{l}(a) = 1\,,$$

d. h. $\bar{l}(a_j)$ ist für *jedes* a_j eine komplexe Einheit [oder auch: $\lambda(\vartheta)$ ist für jedes imprimitive ϑ eine komplexe Einheit; vergleiche (49, 2)].

Für die Gewinnung einer speziellen S-Basis zweiter Art ist also, neben der Existenz von $l(u)$ gemäß Satz 6, noch die einer ganzen rationalen ganzzahligen Funktion $\bar{l}(u)$ *notwendig*, welche die Bedingungen (60, 1) und (65) erfüllt. Wir beweisen jetzt, daß diese Bedingungen auch *hinreichen*, indem wir zeigen, daß dann auch stets zwei Funktionen $\bar{s}(u)$, $\bar{t}(u)$ existieren, die zusammen mit $\bar{l}(u)$ die Gleichungen

(32 b) $$\bar{l}(a) \cdot \bar{s}(a) = p, \qquad \bar{l}(a) \cdot \bar{t}(a) = g - a$$

für alle a_j erfüllen und den Bedingungen (60, 2 und 3) genügen.

Man bemerkt zunächst, daß das Restsystem (35) die sämtlichen reduzierten Restklassen (mod n) bei ungeradem n je einmal, bei geradem n je zweimal enthält. Wählen wir daher $\bar{s}^*(u)$ als ganze usw. Funktion (von höchstens $n-1$-tem Grade) so, daß

$$(40\,a) \qquad \bar{s}^*(u) \equiv \bar{l}(u^{\varrho_2})\,\bar{l}(u^{\varrho_3}) \cdots \bar{l}(u^{\varrho_d}) \pmod{u^n - 1}$$

ist, so folgt aus (65) ganz ähnlich wie bei (37, 38):

$$\bar{l}(u)\,\bar{s}^*(u) \equiv 1 \pmod{u^n - 1}.$$

Wählen wir daher weiter $\bar{s}(u)$ (von höchstens $n-1$-tem Grade) so, daß

$$(43\,a) \quad \bar{s}(u) \equiv \bar{s}^*(u)\,[p + 1 - l(u)\,\bar{s}^*(u)] \pmod{u^n - 1}, \text{ d. h. } \bar{s}(u) = p \cdot \bar{s}^*(u)$$

ist, so wird

$$\bar{l}(a) \cdot \bar{s}(a) = p$$

für jedes a, entsprechend der Bedingung (32 b, 1). Nun war doch schon früher analog zu (40 a)

$$(40) \qquad s^*(u) \equiv l(u^{\varrho_2})\,l(u^{\varrho_3}) \cdots l(u^{\varrho_d}) \pmod{u^n + 1},$$

es ist aber auch gemäß der aus (60, 1) folgenden Gleichung (61)

$$\bar{l}(u^{\varrho_2})\,\bar{l}(u^{\varrho_3}) \cdots \bar{l}(u^{\varrho_d}) \equiv l(u^{\varrho_2})\,l(u^{\varrho_3}) \cdots l(u^{\varrho_d}) \pmod 2,$$

folglich ist auch

$$(66) \qquad \bar{s}^*(u) \equiv s^*(u) \pmod 2.$$

Denn wenn zwei Funktionen beliebigen Grades $H_1(u)$ und $H_2(u)$ nach dem Modul 2 kongruent sind, so behalten sie diese Eigenschaft bei, wenn man sie nach den Moduln $u^n + 1$ bzw. $u^n - 1$ reduziert. Sei nämlich

$$(67) \quad h_1(u) + h_1^*(u) \cdot (u^n + 1) \equiv h_2(u) + h_2^*(u) \cdot (u^n - 1) \pmod 2,$$

wo $h_1(u)$, $h_2(u)$ von höchstens $n-1$-tem Grade seien, so muß auch $h_1^*(u) \equiv h_2^*(u) \pmod 2$ sein, weil sonst die Koeffizienten der höchsten Potenzen von u auf beiden Seiten von (67) nicht kongruent nach dem Modul 2 sein können. Daher ergibt sich wegen

$$h_1(u) \equiv h_2(u) + [h_2^*(u) - h_1^*(u)]\,(u^n - 1) - 2\,h_1^*(u) \pmod 2, \quad \text{daß}$$
$$h_1(u) \equiv h_2(u) \pmod 2.$$

Damit ist die Kongruenz (66) bewiesen. Multiplizieren wir sie mit der aus ihr selbst und (60, 1) folgenden Kongruenz

$$p + 1 - \bar{l}(u)\,\bar{s}^*(u) \equiv p + 1 - l(u)\,s^*(u) \pmod 2,$$

so folgt nach (43) und (43 a)

$$(68) \qquad \bar{s}(u) \equiv s(u) \pmod 2$$

entsprechend der Bedingung (60, 2).

Nun ist $\bar{s}(u)$ nach (43 a) durch p teilbar. Daher kann man eine Funktion $\bar{t}(u)$ von höchstens $n-1$-tem Grade durch die Kongruenz

$$(46\,a) \qquad (g-u)\,\bar{s}(u) \equiv p\cdot\bar{t}(u) \pmod{u^n-1}$$

bestimmen. Multipliziert man beide Seiten von (46 a) mit $l(u)$, so erkennt man, daß $\bar{t}(u)$ die Bedingung (32b, 2) für alle a_j erfüllt. Endlich folgt aus (46), (46a) und (68) ganz wie vorhin

$$(69) \qquad \bar{t}(u) \equiv t(u) \pmod 2$$

entsprechend der Bedingung (60, 3).

Wir können nun den folgenden Satz aussprechen:

Satz 6a: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer speziellen S-Basis zweiter Art sind

1. die Existenz einer Funktion $l(u)$ gemäß Satz 6,
2. die Existenz einer ganzen usw. Funktion $\bar{l}(u)$ von höchstens $n-1$-tem Grade der Art, daß

$$(70) \qquad \bar{l}(u) \equiv l(u) \pmod 2, \quad N_{u^n-1}\bar{l}(a) = 1$$

wird.

Der **Beweis** des Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Wir erwähnen ganz wie bei Satz 6, daß, wenn $\bar{l}(u)$ die Bedingung (70) für irgendein $l(u)$ erfüllt, dann $\bar{l}(u^\varrho)$ das gleiche für $l(u^\varrho)$ leistet, daß es also auch hier gleichgültig ist, welchen der konjugierten Teiler von p man bevorzugen will. Dies ist besonders wichtig für einen etwaigen Beweis der Nichtexistenz von speziellen S-Basen für einen bestimmten Primzahlgrad. Denn wenn beim Satze 6 die Funktionen $G_1(u)$, $G_2(u)$ für irgend ein $l^*(u)$, oder hier die Funktion $\bar{l}(u)$ für irgend ein $l(u)$ *nicht* existieren, so existieren sie auch für keine der konjugierten Funktionen $l^*(u^\varrho)$ bzw. $l(u^\varrho)$. Für einen Beweis der Nichtexistenz von speziellen S-Basen zweiter Art, d. h. von $\bar{l}(u)$ (70) müßte man aber ganz entsprechend auch zeigen, daß, wenn $\bar{l}^0(u)$ für $l^0(u)$ gemäß (70) existiert, dann auch $\bar{l}(u)$ für $l(u)$ existiert, wenn dabei unter $l^0(u)$ eine Funktion von höchstens $n-1$-tem Grade verstanden wird, welche die Form besitzt

$$(71) \qquad l^0(u) = E(u)\cdot l(u) + G(u)\cdot(u^n+1),$$

wobei $E(\beta)$ für *alle* n Größen β_j eine komplexe Einheit ist. Um dieses zu klären, beachte man zunächst, daß zu jedem $E(u)$ ein $E^{-1}(u)$ existiert — nämlich das (mod u^n+1) reduzierte Produkt $E(u^{\varrho_2})\,E(u^{\varrho_3})\cdots E(u^{\varrho_d})$ — derart, daß $E(u)\cdot E^{-1}(u) \equiv 1 \pmod{u^n+1}$ ist. Ferner kann aber zu jedem $E(u)$ ein $\overline{E}(u)$ gefunden werden, so daß $E(u) \equiv \overline{E}(u) \pmod 2$ ist, und daß $\overline{E}(a)$ *für alle* a_j eine komplexe Einheit ist, vorausgesetzt freilich, daß n ungerade ist. In diesem Falle nämlich sind die a_j und β_j einander paarweise entgegengesetzt gleich, und wir können daher $\overline{E}(u) = E(-u)$ setzen. Ist aber n gerade, so sind die β_j selbst zu je zweien einander entgegengesetzt gleich, $\overline{E}(u)$ ist also jedenfalls nicht auf so einfache Weise zu bilden. Eine nähere Untersuchung hierüber, wie über ähnliche

in dieser Arbeit noch offen gelassene Fragen, behalten wir uns für eine andere Gelegenheit vor. Im Falle der Existenz von $\overline{E}(u)$, insbesondere also für ungerades n kann aber der erwähnte Beweis leicht geführt werden. Ist nämlich bei (71)

$$l^0(u) \equiv \overline{l}^0(u) \pmod 2,$$

so multiplizieren wir diese Kongruenz mit der folgenden

$$E^{-1}(u) \equiv \overline{E}^{-1}(u) \pmod 2,$$

und erhalten

$$l(u) \equiv \overline{l}^0(u) \cdot \overline{E}^{-1}(u) \pmod 2.$$

Die rechte Seite wird für jedes a_j als Produkt zweier Einheiten selbst eine Einheit. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Auch hier beschränken wir uns im Rahmen dieser Arbeit auf die Behandlung einiger Beispiele, ohne *allgemein* zu untersuchen, wann die Bedingung (70) erfüllt ist. Es sei nur hervorgehoben, daß die Untersuchungen des § 1 ihre Bedeutung behalten, auch abgesehen davon, daß es Fälle gibt (z. B. $p = 13$), in denen zwar eine spezielle S-Basis erster, nicht aber eine zweiter Art existiert. Denn auch in den Fällen, in denen schon die Basis erster Art nicht existiert, d. h. also in der Mehrzahl der Fälle, wird man doch zur Vereinfachung des Problems (vgl. Satz 1 und den Anfang des § 2) auf die Basisfunktionen φ_{j+1} (14) zurückgreifen.

§ 4. Anwendungen und Beispiele.

Im folgenden werden für einige Primzahlen die Funktion $l(u)$ so, wie sie zur Konstruktion der Funktionen ψ_j (26) nötig ist, und teilweise auch letztere selbst bestimmt. An sich ist hierzu die Berechnung der Funktionen $s(u)$, $t(u)$ nicht erforderlich. Auch diese werden aber überall hinzugefügt, um eine leichte Kontrolle der Richtigkeit an Hand der Formeln (29, 30) sowie überhaupt die *Anwendung* der Basis (26) zu ermöglichen. In einigen Fällen wird auch die Funktion $\overline{l}(u)$ berechnet, die zusammen mit $l(u)$ nach (59) die Bestimmung von $\lambda(u)$ und damit die der speziellen S-Basis zweiter Art (54) erlaubt. Auch hier fügen wir, zur Kontrolle der Richtigkeit an Hand der Formeln (60, 32 b) bzw. (29 a, 30 a) auch die Funktionen $\overline{s}(u)$, $\overline{t}(u)$ bzw. $\sigma(u)$, $\tau(u)$ bei [1]). Auf die verschiedenen erwähnten Kontrollen wird im folgenden in der Regel nicht mehr besonders hingewiesen werden, da der Leser sie leicht durchführen kann, etwa so, wie wir es weiterhin, als Beispiel, im Falle $p = 23$ zeigen.

Die in den vorhergehenden Paragraphen angegebene, *allgemein gültige* Berechnung der Funktionen $s(u)$ und $\overline{s}(u)$ ist übrigens, wie besonders hervorgehoben sei, durchaus nicht immer die *praktisch einfachste.* Wir verzichten jedoch hier

---

[1]) Wo wir im folgenden die Funktionen ψ_j (26) oder v_μ (54) aufgeführt haben, kann deren Eigenschaft, eine Minimalbasis zu bilden, leicht an Hand der entsprechenden Formeln (24, 25) bezw. (24 a, 25 a) festgestellt werden.

darauf, die leicht erkennbaren Rechenvorteile, insbesondere für die Primzahlen $p = 2q + 1$, aufzuführen.

Wo im folgenden Bezeichnungen $L^*(u)$, $L(u)$, $S(u)$ usw. auftreten, entsprechen sie den gleichen Funktionen mit kleinen Buchstaben, nur erfüllen $L^*(u)$ und $L(u)$, im Gegensatz zu $l^*(u)$ und $l(u)$, die Kongruenz (33) nicht für die *kleinste* positive Kongruenzwurzel von p. Wo Formeln mit Nummern bezeichnet sind, die bereits bei früheren Gleichungen Verwendung fanden, soll damit auf jene als theoretische Grundlage der Rechnung hingewiesen werden.

Im Falle

1. $\boldsymbol{p=3}$, $n = 1$, $g = 2$

ist zwar eine zyklische Minimalbasis — eine andere kommt hier nicht in Frage — schon lange bekannt[1]), auch werden die Rechnungen beinahe trivial; sie sollen aber doch, einer einfachen Anwendung wegen, angegeben werden. Da hier

(34; 1) $$f(u) = u + 1 \quad \text{(vgl. auch Satz 7)}$$

ist und $g - \beta$ also nur den Wert 3 annimmt, so ist 3 selbst der gesuchte gemeinsame Teiler $l(\beta)$ von p und $g - \beta$, d. h. es wird

(72) $$l(u) = 3, \quad s(u) = 1, \quad t(u) = 1.$$

Wir beschränken uns hier auf Behandlung der speziellen S-Basis zweiter Art und finden leicht

(72 b) $$\bar{l}(u) = 1, \quad \bar{s}(u) = 3, \quad \bar{t}(u) = 1,$$

also

(72 a) $$\lambda(u) = 2 - u, \quad \sigma(u) = 2 + u, \quad \tau(u) = 1,$$

mithin

(54; 1) $$v_0 = k_0^2 k_1^{-1}, \quad v_1 = k_1^2 k_0^{-1},$$

(56; 1) $$V_0 = \varepsilon k_0^2 k_1^{-1} + \varepsilon^2 k_1^2 k_0^{-1}, \quad V_1 = \varepsilon^2 k_0^2 k_1^{-1} + \varepsilon k_1^2 k_0^{-1}.$$

Wir machen eine Anwendung dieses Resultates, um die Koeffizienten der *zyklischen* Gleichungen der Form

(73) $$x^3 + a_2 x + a_3 = 0$$

durch zwei Parameter, eben die Basisfunktionen V_0 und V_1, auszudrücken. Da nun nach (3)

$$x_\nu = \varepsilon^{-\nu} k_0 + \varepsilon^{-2\nu} k_1 \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

so wird

$$a_2 = x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_0 = -3 k_0 k_1 = -3 v_0 v_1$$
$$a_3 = -x_0 x_1 x_2 \qquad\qquad = -(k_0^3 + k_1^3) = -v_0 v_1 (v_0 + v_1).$$

---

[1]) Vergleiche *F. Hack*, Beiträge zur Anwendung der Gruppentheorie usw., Diss. Tübingen 1895. — *F. Seidelmann*, Die Gesamtheit der kubischen und biquadratischen Gleichungen usw., Diss. Erlangen 1916.

Setzen wir hierein die aus (54; 1 und 56; 1) sich ergebenden Ausdrücke

$$3\,v_0 = -(V_0 + V_1) + \varepsilon^2 V_0 + \varepsilon V_1, \quad 3v_1 = -(V_0 + V_1) + \varepsilon V_0 + \varepsilon^2 V_1$$

ein, so erhalten wir die gesuchten Ausdrücke

$$(74)\quad a_2 = -(V_0^2 + V_0 V_1 + V_1^2), \quad a_3 = \frac{1}{3}(V_0 + V_1)(V_0^2 + V_0 V_1 + V_1^2).$$

Setzt man hier noch

$$(75)\qquad V_0 + V_1 = 2r, \quad V_0 - V_1 = 6s,$$

so erhält man die *Hack-Seidelmann*sche [1]) Form der Koeffizienten

$$(74\,a)\qquad a_2 = -3(r^2 + 3s^2), \quad a_3 = 2r(r^2 + 3s^2),$$

vor der die unsere (74) die größere Symmetrie voraus hat, da sie sich nicht ändert, wenn die beiden Parameter V_0, V_1 miteinander vertauscht werden. Dies rührt offenbar davon her, daß V_0, V_1 „konjugierte" Funktionen sind. Bei den Gleichungen fünften Grades fällt dieser Umstand ganz bedeutend ins Gewicht.

2. $\boldsymbol{p = 5}$, $n = 2$, $g = 2$; (34; 2) $f(u) = u^2 + 1$; Satz 7.

Da $5 = (2 + i)(2 - i)$, so findet man unmittelbar

$$(76)\qquad l(u) = 2 - u, \quad s(u) = 2 + u, \quad t(u) = 1,$$

$$(26;\,2)\qquad \psi_0 = q_0^2 q_1^{-1}, \quad \psi_1 = q_1^2 q_0.$$

Die aus (26; 2) mit Hilfe der schon lange bekannten zyklischen Minimalbasis vierten Grades [1]) sich ergebenden metazyklischen Minimalbasen im $\Re(\varepsilon)$ und im $\Re_0$ sind in *B.* § 2 eingehend untersucht, ebenso auch die weiter unten abgeleitete Basis (26; 3) für $p = 7$. Nur sind dort an Stelle der hier eingeführten Funktionen φ_{j+1} (14, 2) andere, aber prinzipiell das Gleiche leistende Funktionen eingeführt. Dort werden auch in der Einleitung und im § 3 die Gründe auseinandergesetzt, aus welchen die so gewonnenen Minimalbasen zur Koeffizienten-Darstellung ungeeignet sind. Diese Gründe gelten aber *nicht* für die nun zu bestimmende spezielle *S*-Basis zweiter Art. Man findet leicht

$$(76\,b)\qquad \bar{l}(u) = u, \quad \bar{s}(u) = 5u, \quad \bar{t}(u) = -1 + 2u,$$

$$(76\,a)\qquad \lambda(u) = 1 - u^2 + u^3, \quad \sigma(u) = 1 + 3u - u^2 + 2u^3,$$
$$\tau(u) = u - u^2 + u^3,$$

$$(54;\,2)\qquad v_0 = \frac{k_0 k_3}{k_2}, \quad v_1 = \frac{k_1 k_0}{k_3}, \quad v_2 = \frac{k_2 k_1}{k_0}, \quad v_3 = \frac{k_3 k_2}{k_1}.$$

Diese Basis ist infolge ihres symmetrischen Baues zur Darstellung der Koeffizienten der auflösbaren Gleichungen fünften Grades hervorragend geeignet. Der Verfasser hat diese Darstellung an anderem Orte [2]) vollständig durchgeführt,

---

[1]) Siehe Anm. 1) S. 35.

[2]) *Breuer*, Über die irreduzibelen auflösbaren Gleichungen fünften Grades. Festschrift anläßlich des 100-jährigen Bestehens der Technischen Hochschule Karlsruhe 1925, Seite 107—129. — Die dortige Formel (13) entspricht unserer Formel (54; 2) bis auf Numerierung und Bezeichnung.

und zwar unter Trennung der auflösbaren Gleichungen nach ihren *Galois*schen Gruppen.

Wir erwähnen noch, daß im Einklang mit unserer Bemerkung zu Formel (64) hier die Quotienten $\frac{v_2}{v_0}$ und $\frac{v_3}{v^1}$ mit ψ_0, ψ_1 (26; 2) übereinstimmen und betrachten nunmehr den Fall

3. $\boldsymbol{p=7}$, $n=3$, $g=3$; (34; 3) $f(u)=u^2-u+1$,
$F(u)=u+1$; Satz 7.

Wir finden bei *Reuschle*[1])

$$L^*(u)=1-3u,$$

also $L^*(5)\equiv 0 \pmod 7$. Da nun[2]) $5^5\equiv 3 \pmod 7$, $5\cdot 5\equiv 1 \pmod 6$, ist folglich $l^*(u)\equiv L^*(u^5) \pmod{u^3+1}$, also $l^*(u)=1+3u^2$, wo $l^*(3)\equiv 0 \pmod 7$; aber $l^*(-1)=4$, mithin (47; 3) $l(u)=l^*(u)-f(u)$, oder bei Division durch den überflüssigen Faktor u, $l(u)=1+2u$.

Das Restsystem (35) wird hier durch 1,5 dargestellt, also ist $s^*(u)=1-2u^2$, woraus sich $s(u)$ nach (43) und $t(u)$ nach (46) sofort bestimmen lassen. Man findet

(77) $l(u)=1+2u$, $s(u)=-1+2u-4u^2$, $t(u)=-1+u-2u^2$,

(26; 3) $\psi_0=q_0q_1^2$, $\psi_1=q_1q_2^2$, $\psi_2=q_2q_0^{-2}$ [3]).

Weiter sieht man unmittelbar, daß

(77 b) $\bar{l}(u)=1$, $\bar{s}(u)=7$, $\bar{t}(u)=3-u$

wird, also

(77 a) $\lambda(u)=1+u-u^4$, $\sigma(u)=3+u-2u^2+4u^3-u^4+2u^5$,
$\tau(u)=1-u^2+2u^3-u^4+u^5$

(54; 3)
$$v_0=\frac{k_0k_1}{k_4},\quad v_1=\frac{k_1k_2}{k_5},\quad v_2=\frac{k_2k_3}{k_0},$$
$$v_3=\frac{k_3k_4}{k_1},\quad v_4=\frac{k_4k_5}{k_2},\quad v_5=\frac{k_5k_0}{k_3}.$$

Wie der Fall $p=7$ im Hinblick auf Satz 2 sich unmittelbar an $p=3$ anschließt, so behandeln wir jetzt im Hinblick auf $p=5$ den Fall $p=11$ und weiter $p=23$.

---

[1]) In den „Tafeln" findet man die Form $L^*(u)=1+3u$, weil dort der Körper der Wurzeln von $u^2+u+1=0$ zugrunde gelegt ist, nicht der von $f(u)=0$. Das Vorzeichen von u war also zu ändern. Entsprechendes gilt für die Fälle $p=11$, 23, 19, während wir bei $p=13$, 17 die Funktion $L^*(u)$ unmittelbar von *Reuschle* entnehmen können.

[2]) Vergleiche hierzu die Bemerkung am Anfang des Beweises zu Satz 4.

[3]) Diese Basis (26; 3) ist, ebenso wie die (26; 2) für $p=5$ schon früher von Fräulein *Noether* angegeben worden, wenn auch nur in dieser, ausschließlich für den Bereich $\Re(\varepsilon)$ gültigen Form; vgl. hierzu *B.* Einleitung. Dagegen sind die speziellen *S*-Basen zweiter Art (54; 2 und 54; 3), ebenso wie überhaupt die Minimalbasen in allen weiterhin behandelten Fällen, unseres Wissens noch nirgends angegeben worden; selbst die Frage nach der Existenz der Minimalbasis ist für $p>7$ früher noch nicht geklärt worden.

4. $\boldsymbol{p=11}$, $n=5$, $g=2$; (34; 4) $f(u)=u^4-u^3+u^2-u+1$, $F(u)=u+1$; Satz 7.

Wir finden bei *Kummer* und *Reuschle*, nach Multiplikation mit gewissen Potenzen von u

$$L^*(u)=1+2u^2.$$

Wir ordnen hier die Rechnung etwas anders an, als im vorigen Falle. Es ist $L^*(-1)=3$; (52; 4) $2\cdot 3-1\cdot 5=1$, also $\pi=2$, $\varrho=-1$; mithin nach (53) und (47) $L(u)=(1-u)(1+2u^2)-f(u)$, oder nach Division durch u^2: $L(u)=1-u-u^2$, also $L(7)\equiv 0 \pmod{11}$; folglich wird wegen[1]) $7^3\equiv 2 \pmod{11}$, $3\cdot 7\equiv 1 \pmod{10}$; $l(u)\equiv L(u^7) \pmod{u^5+1}$, d. h. $l(u)=1+u^2-u^4$; nun ergibt sich nach (40) sehr einfach

$$\begin{aligned} s^*(u) &= (1-u-u^2)(1+u^3+u^4)(1+u-u^3) \\ &\equiv 2+4u-u^2-3u^3+u^4 \pmod{u^5+1}, \end{aligned}$$

und $s(u)$ nach (43), oder auch — wegen $s^*(-1)=1$ — nach der Formel $s(u)=s^*(u)+2f(u)$, wodurch ebenfalls $s(-1)=11$ erreicht wird, sowie schließlich $t(u)$ nach (46). Man findet:

$$\begin{aligned} (78)\quad & l(u)=1+u^2-u^4, \quad s(u)=4+2u+u^2-5u^3+3u^4, \\ & t(u)=1-u^3+u^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (26;\ 4)\quad & \psi_0=\frac{q_0q_2}{q_4}, \quad \psi_1=q_0q_1q_3, \quad \psi_2=q_1q_2q_4, \\ & \psi_3=\frac{q_2q_3}{q_0}, \quad \psi_4=\frac{q_3q_4}{q_1}. \end{aligned}$$

Auch hier gelingt es unschwer, noch eine spezielle S-Basis zweiter Art zu konstruieren. Zunächst genügt nämlich $\bar{l}(u)=1-u^2+u^4$ den Anforderungen des Satzes 6 a; denn $\bar{l}(u)\equiv l(u) \pmod 2$ und $\bar{l}(u)$ ist für alle Wurzeln von $u^5-1=0$ eine Einheit, weil

$$(1-u^2+u^4)(u^2-u^3+u^4)=1+(1-u^2+u^3)(u^5-1)$$

ist. Weiter wird nach (40 a)

$$\bar{s}^*(u)\equiv(1-u+u^2)(1+u^3-u^4)(1+u-u^3) \pmod{u^5-1}=u^2-u^3+u^4;$$

und hieraus findet man $\bar{s}(u)$ nach (43 a), da $\bar{l}(u)\cdot\bar{s}^*(u)\equiv 1 \pmod{u^5+1}$, in der besonders einfachen Gestalt $\bar{s}(u)=11\,\bar{s}^*(u)$, woraus dann nach (46 a) sich ergibt $\bar{t}(u)\equiv(2-u)\cdot s^*(u) \pmod{u^5-1}$. Mithin wird:

$$\begin{aligned} (78\,\mathrm{b})\quad & \bar{l}(u)=1-u^2+u^4, \quad \bar{s}(u)=11u^2-11u^3+11u^4, \\ & \bar{t}(u)=-1+2u^2-3u^3+3u^4. \end{aligned}$$

---

[1]) Siehe Anm. 2) S. 37.

(78 a) $\lambda(u) = 1 - u^7 + u^9$, $\sigma(u) = 2 + u + 6u^2 - 8u^3 + 7u^4 - 2u^5 - u^6 + 5u^7 - 3u^8 + 4u^9$, $\tau(u) = u^2 - 2u^3 + 2u^4 - u^5 + u^7 - u^8 + u^9$.

(54; 4) $v_0 = \frac{k_0 k_9}{k_7}$, $v_1 = \frac{k_1 k_0}{k_8}$, $v_2 = \frac{k_2 k_1}{k_9}$, $v^3 = \frac{k_3 k_2}{k_0}, \ldots, v_9 = \frac{k_9 k_8}{k_6}$.

5. $\boldsymbol{p = 23}$, $n = 11$, $g = 5$; (34; 5) $f(u) = u^{10} - u^9 + \cdot - \cdots - u + 1$, $F(u) = u + 1$; Satz 7.

Wir entnehmen den Tafeln von *Reuschle*, nach Division durch u und Änderung des Vorzeichens [1]) von u die Form

$$L^*(u) = 1 - u^3 - u^5.$$

[Die bei *Kummer* angegebene Form $1 - u - u^9$ ist offenbar nichts anderes als $L^*(u^{15})$, also hiervon nicht wesentlich verschieden.] Durch geeignete Zusammenfassung der konjugierten Faktoren berechnet man ohne große Mühe entsprechend Formel (40)

$$S^*(u) = 14 - 4u - 3u^2 + u^3 + 5u^4 + 8u^6 - 9u^7 + 12u^8 + 2u^9 + 2u^{10}.$$

$L^*(-1) = 3$; (52; 5) $4 \cdot 3 - 1 \cdot 11 = 1$, also $\pi = 2$, $\varrho = -1$; mithin nach (53) und (47) $L(u) = [(1 - u + u^2 - u^3) L^*(u) - f(u)] u^8$, wobei der Faktor u^8 zur Vereinfachung hinzugefügt ist. Wir finden

(79) $$L(u) = 1 + u^2 - u^3 - u^6 + u^7; \quad L(-1) = 1.$$

Statt nun $S(u)$ aus $S^*(u)$ nach (43) zu bestimmen, können wir auch $S^*(u)$ so behandeln, wie das soeben nach (47) mit $L^*(u)$ geschah, also

(80) $$S(u) = G_1'(u) S^*(u) + G_2'(u) f(u)$$

setzen, und dabei $G_1'(u)$, $G_2'(u)$ so wählen, daß *einmal* $S(-1) = 23$ wird, und daß *ferner* das Produkt aus $G_1'(u)$ und dem soeben bei $L^*(u)$ benutzten Multiplikator $G_1(u) = 1 - u + u^2 - u^3$ nach dem Modul $f(u)$ kongruent 1 wird. Nun ist $S^*(-1) = 48$; $3 \cdot 48 - 11 \cdot 11 = 23$. Man erkennt daher leicht, daß $G_1'(u) = 1 + u^4 + u^8$ den gestellten Anforderungen genügt, setzt zur Vereinfachung der Rechnung gemäß (80)

$$S(u) = (1 + u^4 + u^8)\,[S^*(u) - 4 f(u)] + f(u)$$

und erhält

(81) $$S(u) = 20 + 9u - 4u^2 - 11u^3 + 10u^4 + 16u^5 - 2u^6 - 17u^7 + 5u^8 + 8u^9 - u^{10}.$$

Nun ist $\boldsymbol{L(15)} \equiv 0 \pmod{23}$; da $15^{13} \equiv 5 \pmod{23}$ und $13 \cdot 17 \equiv 1 \pmod{22}$, so wird [2]) $l(u) \equiv L(u^{17})$ und $s(u) \equiv S(u^{17}) \pmod{u^{11} + 1}$, während zuletzt $t(u)$

---

[1]) Siehe Anm. 1) S. 37.
[2]) Siehe Anm. 2) S. 37.

wieder gemäß (46) bestimmt wird. Man erhält

$$(82)\quad \begin{cases} l(u) = 1 - u + u^3 - u^7 + u^9 \\ s(u) = 20 + 4u + 10u^2 + 2u^3 + 5u^4 + u^5 - 9u^6 - 11u^7 - 16u^8 \\ \qquad\qquad - 17u^9 - 8u^{10} \\ t(u) = 4 + 2u^2 + u^4 - 2u^6 - 2u^7 - 3u^8 - 3u^9 - u^{10}. \end{cases}$$

Da die Berechnung dieser Funktionen hier zum größten Teile unterdrückt ist, fügen wir ein einfaches Kontrollschema an Hand der Formeln (29, 30) bei, indem wir nur die Koeffizienten der Potenzen von u hinschreiben, diese selbst aber weglassen und natürlich bei der Multiplikation sofort mod $(u^{11}+1)$ reduzieren. Dann wird

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s(u)\cdot l(u) =$	20,	4,	10,	2,	5,	1,	− 9,	−11,	−16,	−17,	− 8
	− 8,	−20,	− 4,	−10,	− 2,	−5,	− 1,	9,	11,	16,	17
	16,	17,	8,	20,	4,	10,	2,	5,	1,	−9,	−11
	5,	1,	− 9,	−11,	−16,	−17,	− 8,	−20,	− 4,	−10,	− 2
	−10,	− 2,	− 5,	− 1,	9,	11,	16,	17,	8,	20,	4
	23,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0
$t(u)\cdot l(u) =$	4,	0,	2,	0,	1,	0,	− 2,	− 2,	− 3,	− 3,	− 1
	− 1,	− 4,	0,	− 2,	0,	− 1,	0,	2,	2,	3,	3
	3,	3,	1,	4,	0,	2,	0,	1,	0,	− 2,	− 2
	1,	0,	− 2,	− 2,	− 3,	− 3,	− 1,	− 4,	0,	− 2,	0
	− 2,	0,	− 1,	0,	2,	2,	3,	3,	1,	4,	0
	5,	− 1,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0

Aus diesen Kontrollen ergibt sich ohne jede Berücksichtigung der Herleitung von $l(u)$, daß die aus $l(u)$ (82, 1) leicht zu bildenden 11 Funktionen ψ_j (26) eine spezielle S-Basis erster Art bilden.

Mit der Aufstellung dieser Formeln für die Zahlen $p = 11, 23$ sind die metazyklischen Minimalbasen dieser Grade implizite vollständig bekannt und also auch die Darstellbarkeit der Koeffizienten der auflösbaren Gleichungen dieser Grade, getrennt nach *Galois*schen Gruppen, gleich wie in den Fällen $p = 5, 7$ nachgewiesen, da hier nach Satz 2 eine sukzessive Reduktion auf gleichfalls bekannte Minimalbasen stattfindet.

Für die Primzahl $p = 47$, die sich an 5, 11, 23 anschließen würde, ist bereits bei *Kummer* a. a. O. gezeigt, daß sie sich nicht in der Form (48) darstellen läßt. Hier existiert also keine spezielle S-Basis.

An die Zahlen 3, 5 schließt sich nun als nächste *Fermat*sche Primzahl an die Zahl

6. $\boldsymbol{p = 17}$, $n = 8$, $g = 3$; (34; 6) $f(u) = u^8 + 1$; Satz 7.

Wir finden bei *Reuschle*

$$L^*(u) = 1 + u + u^5,$$

also $L^*(\mathbf{10}) \equiv 0 \pmod{17}$; da nun $10^{11} \equiv 3 \pmod{17}$ und $3 \cdot 11 \equiv 1 \pmod{16}$, so wird [1]) $l^*(u) \equiv L^*(u^3) \pmod{u^8+1}$, und da hier $l(u) = l^*(u)$, so wird $l(u) = 1 + u^3 - u^7$. Ferner wird hier $s(u) = s^*(u)$ sehr leicht, durch geeignete Zusammenfassung konjugierter Faktoren, nach (40), und schließlich $t(u)$ wie immer nach (46) gefunden. Es wird

$$(83)\quad \begin{cases} l(u) = 1 + u^3 - u^7 \\ s(u) = 1 + 6u + 2u^2 - 5u^3 + 4u^4 - 10u^5 + 8u^6 - 3u^7 \\ t(u) = u - u^3 + u^4 - 2u^5 + 2u^6 - u^7, \end{cases}$$

womit die spezielle S-Basis erster Art (26) auch für diesen Fall bekannt ist.

7. $\boldsymbol{p = 13}$, $n = 6$, $g = 2$; (34; 7) $f(u) = u^4 - u^2 + 1$, $F(u) = u^2 + 1$.

Wir finden bei *Reuschle*

$$L^*(u) = 1 - 2u - u^5.$$

Da hier $L^*(i) = 1 - 3i$, $f(i) = 3$, setzen wir gemäß (47)
$L(u) = 1 \cdot L^*(u) + u \cdot f(u) = 1 - u - u^3$, so daß $L(i) = 1$. Da ferner hier $L(\mathbf{6}) \equiv 0 \pmod{13}$, $6^5 \equiv 2 \pmod{13}$, $5 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{12}$, so wird [1]) $l(u) \equiv L(u^5) \pmod{u^6+1}$ gefunden und sodann $s^*(u)$, $s(u)$, $t(u)$ wie in den früheren Fällen. Es wird

$$(84)\quad l(u) = 1 - u^3 - u^5, \quad s(u) = 6 + 3u - 5u^2 + 4u^3 + 2u^4 + u^5,$$
$$t(u) = 1 - u^2 + u^3.$$

Wir erwähnen noch, daß sich hier sehr leicht der Nachweis erbringen läßt, daß eine Funktion $\bar{l}(u)$ gemäß Satz 6a und somit eine spezielle S-Basis zweiter Art *nicht* existiert. Zum Schluß behandeln wir den Fall

8. $\boldsymbol{p = 19}$, $n = 9$, $g = 2$; (34; 8) $f(u) = u^6 - u^3 + 1$,
$$F(u) = u^3 + 1 = (u+1)(u^2 - u + 1).$$

Wir finden bei *Reuschle* nach Änderung des Vorzeichens von u [2])

$$L^*(u) = 1 - u - u^2.$$

Es wird $L^*(-1) = 1$, $L^*(\delta) = -2\delta^2$ für $\delta \neq -1$. Man findet leicht, daß $G_1(u) = -(1+u^2)$ für die Wurzeln γ von $f(u) = 0$ eine Einheit ist wegen

$$(1+u^2)(u - u^6 + u^8) = 1 + (u^4 + u - 1)(u^6 - u^3 + 1),$$

und setzt in Anlehnung an (47)

$$L(u) = [-(1+u)^2 L^*(u) + f(u)]u^{-1} = 1 + u^3 + u^5,$$

was für *alle* Wurzeln von $F(u) = 0$ eine Einheit ist. Nun ist noch $L(\mathbf{14}) \equiv 0 \pmod{19}$, aber $14^{13} \equiv 2 \pmod{19}$ und $13 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{18}$, also [1]) wird $l(u) \equiv L(u^7) \pmod{u^9+1}$, woraus dann $s^*(u)$, $s(u)$, $t(u)$ in der bis-

[1]) Siehe Anm. 2) S. 37.
[2]) Siehe Anm. 1) S. 37.

herigen Weise leicht bestimmt werden. Man erhält

$$(85)\quad \begin{cases} l(u) = 1 + u^3 - u^8 \\ s(u) = 8 + 4u + 2u^2 + u^3 - 9u^4 + 5u^5 - 7u^6 + 6u^7 + 3u^8 \\ t(u) = 1 - u^4 + u^5 - u^6 + u^7 . \end{cases}$$

In den drei zuletzt behandelten Fällen ist, im Gegensatz zu den vorhergehenden, durch Angabe der Formeln für die $l(u)$, nur eine *Reduktion* des Basisproblems im Sinne des Satzes 2, noch nicht aber dessen vollständige Lösung erreicht, da die zyklischen Minimalbasen 16-ten, 12-ten und 18-ten bzw. 9-ten Grades noch nicht bekannt sind.

Die Transformation einer Gruppe ausgezeichneter Kurven erster Art in einen gewöhnlichen Punkt.

Von *Fritz Buschmann* in Halle a. d. S.

Einleitung.

Wenn zwei algebraische Flächen durch birationale Transformation auseinander hervorgehen, so entsprechen sich im wesentlichen die Punkte beider Flächen eineindeutig, es können aber Kurven in Punkte, d. h. Primteiler erster Art in solche zweiter Art, übergehen, und umgekehrt Punkte in Kurven. Derartige Kurven einer Fläche, die durch birationale Transformation aus einem Punkte hervorgehen, nennt man *ausgezeichnete Kurven. Erster Art* heißen solche, die in einen gewöhnlichen Punkt transformiert werden können, ohne daß einer ihrer Punkte in eine Kurve übergeht, und *zweiter Art* solche, die nur dann in einen gewöhnlichen Punkt transformiert werden können, wenn durch die Transformation gleichzeitig mindestens einer ihrer Punkte in eine neue Kurve übergeht.

Für ganz einfache Fälle sind die charakteristischen Eigenschaften der ausgezeichneten Kurven erster Art angegeben von *G. Castelnuovo* und *F. Enriques* [1]). Für den allgemeinsten Fall sind *notwendige* Eigenschaften der ausgezeichneten Kurven erster Art angegeben von *H. W. E. Jung* [2]). In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß diese Eigenschaften auch *hinreichend* sind.

Die ausgezeichneten Kurven erster Art zerfallen in Gruppen. Die Kurven derselben Gruppe hängen durch Schnittpunkte miteinander zusammen, während zwei Kurven verschiedener Gruppen sich nicht schneiden.

Irgendeine Gruppe bestehe aus den ϱ Primkurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$. Die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{B}_k$ und $\mathfrak{B}_l$ bezeichnen wir mit $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_l)$ und setzen $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_l) = -b_{kl}$. Das System (b_{kl}) sei mit b und das zu b reziproke System (a_{kl}), das immer existiert, sei mit a bezeichnet. Die Systeme a und b haben folgende notwendige Eigenschaften:

1. a und b sind quadratische, symmetrische und ganzzahlige Systeme mit der Determinante 1.

---

[1]) *G. Castelnuovo* und *F. Enriques*, Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche, Ann. di mat. 6 (s. 3) (1900), Abschnitt 3.

[2]) *H. W. E. Jung*, Über die ausgezeichneten Kurven algebraischer Flächen, J. f. M. Bd. 142, pag. 102. Man vergleiche auch *H. W. E. Jung*, Algebraische Flächen, Helwingsche Verlagsbuchhdlg. Hannover 1925, pag. 63—90.

2. Alle a_{kl} sind positive Zahlen, ebenso alle b_{kk}. Für $k \neq l$ sind $2(\varrho - 1)$ der Zahlen b_{kl} gleich -1, die übrigen sind Null.
3. Die Elemente a_{kl} können so geordnet werden, daß alle Determinanten, die aus den ersten i Horizontalreihen und den ersten i Vertikalreihen (für $i = 1, 2, \ldots \varrho$) bestehen, gleich 1 sind. Wir nehmen im folgenden an, daß das System a in dieser Weise geordnet ist.
4. Die Systeme a und b können durch Hilfssysteme h und g in Einheitssysteme transformiert werden. Bezeichnen wir ein System, das aus einem anderen durch Vertauschen der Vertikal- und Horizontalreihen hervorgeht, durch Überstreichen, und schreiben wir für das Einheitssystem kurz die Zahl 1, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{h}ah = 1, \quad & gb\bar{g} = 1 \\ \bar{g}g = a, \quad & h\bar{h} = b \\ ab = 1, \quad & gh = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

5. In den Systemen g und h stehen in der Hauptdiagonale Einsen, unter ihr Nullen. Oberhalb der Diagonale stehen in h entweder die Zahlen 0 oder -1, und in g Zahlen größer oder gleich Null. Es möge noch angegeben werden, daß a und g in der ersten Horizontalreihe, b und h in der letzten Vertikalreihe übereinstimmen.
6. Durch die Gleichung

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varrho) = (1, 1, \ldots, 1)\, g \tag{2}$$

wird eine Kurve

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1^{\beta_1} \mathfrak{B}_2^{\beta_2} \cdots \mathfrak{B}_\varrho^{\beta_\varrho} \tag{3}$$

definiert. Es ist immer

$$(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{K}), \quad (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i\, \mathfrak{B}) = -2, \tag{4}$$

wenn $\mathfrak{K}$ eine Kurve der kanonischen Klasse der Fläche ist.

Wir wollen die vorstehenden Eigenschaften der Systeme a und b und der Kurven $\mathfrak{B}_i$ als erfüllt voraussetzen und beweisen, daß sie hinreichend sind dafür, daß die Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$ eine Gruppe von ausgezeichneten Kurven erster Art bilden, oder mit anderen Worten, daß wir sie alle in ihrer Gesamtheit durch eine passende birationale Transformation in einen gewöhnlichen Punkt transformieren können.

Zu diesem Zwecke gehen wir von einer Kurvenschar $\langle \mathfrak{C} \rangle$ aus und leiten aus ihr durch Hinzufügen passender Potenzen der $\mathfrak{B}_i$ eine Kurvenschar $\langle \mathfrak{G} \rangle$ ab, deren Kurven die $\mathfrak{B}_i$ nicht schneiden. Deuten wir r passend gewählte Kurven $\mathfrak{G}^{(1)}, \mathfrak{G}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{G}^{(r)}$ aus der Schar $\langle \mathfrak{G} \rangle$ oder, was dasselbe ist, aus der Kurvenklasse $\langle \mathfrak{G} \rangle$ als ebene Schnitte einer neuen Fläche, so entspricht der Gruppe der Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$ auf dieser Fläche ein Punkt, und zwar, wie wir zeigen werden, ein gewöhnlicher Punkt.

I. Wahl von $(\mathfrak{C})$.

Es sei $(\mathfrak{T})$ irgendeine Kurvenklasse einer algebraischen Fläche, und $(\mathfrak{T}') = (\mathfrak{K}\mathfrak{T}^{-1})$ die Ergänzungsklasse von $(\mathfrak{T})$. Ist die Dimension $\{\mathfrak{T}'\}$ der Klasse $(\mathfrak{T}')$ gleich Null, dann ist nach dem *Riemann-Roch*schen Satz für zwei unabhängige Veränderliche

$$\{\mathfrak{T}\} \geqq -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}') + p_a + 1 ,$$

wo p_a das arithmetische Geschlecht der Fläche bedeutet. Steht das Gleichheitszeichen, so heißt die Klasse $(\mathfrak{T})$ *regulär*. Wir wählen nun eine reguläre Kurvenklasse $(\mathfrak{C})$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\{\mathfrak{C}\} \geqq 4$.
2. Die Klasse $(\mathfrak{C})$ sei primitiv, d. h. unter den ganzen Kurven von $(\mathfrak{C})$ sollen Primkurven vorkommen.
3. Die ganzen Kurven von $(\mathfrak{C})$ sollen keine allen gemeinsame feste Stellen haben, so daß es in $(\mathfrak{C})$ ganze Kurven ohne mehrfache Stellen gibt.
4. $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{C}) = c_i > 0$ für $i = 1, 2, \ldots, \varrho$.
   Eine solche Klasse $(\mathfrak{C})$ gibt es immer. Zunächst kann man, wenn nötig, die gegebene Fläche immer birational in eine solche transformieren, daß den Primteilern $\mathfrak{B}_i$ wirkliche Kurven entsprechen. Ist dann $(\mathfrak{A})$ die Klasse, der die ebenen Schnitte dieser Fläche angehören, so ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_i) > 0$ und auch $(\mathfrak{A}^\lambda, \mathfrak{B}_i) = \lambda(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_i) > 0$ für positives λ. Man kann aber λ immer so groß wählen, daß die Klasse $(\mathfrak{A}^\lambda)$ regulär ist [1]). Wir brauchen dann nur $(\mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{A}^\lambda)$ zu setzen, damit die Eigenschaft $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{C}) > 0$ immer erfüllt ist.
5. Da $(\mathfrak{C})$ regulär ist, gilt

$$\{\mathfrak{C}\} = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}') + p_a + 1 . \tag{5}$$

Wir definieren:

Eine Klasse $(\mathfrak{Q})$, deren Dimension größer als Eins ist, heißt *primitiv*, wenn nicht alle ihre ganzen Kurven einen gemeinsamen Teiler haben; sie heißt *vollkommen primitiv*, wenn außerdem die ganzen Kurven von $(\mathfrak{Q})$ keinen allen gemeinsamen Punkt haben.

Unter Berücksichtigung dieser Definition können wir die oben angegebenen Eigenschaften 2. und 3. zusammenfassen, indem wir sagen: Die Klasse $(\mathfrak{C})$ sei vollkommen primitiv.

II. Bestimmung von Hilfskurven.

Wir bestimmen aus den Primkurven $\mathfrak{B}_k$ zusammengesetzte Kurven $\mathfrak{E}_i$, so daß die Gleichungen

$$(\mathfrak{E}_i, \mathfrak{E}_i) = -1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{E}_i, \mathfrak{B}) = -1 \tag{6}$$

erfüllt sind, wo $\mathfrak{B}$ durch (2) und (3) definiert ist.

---

[1]) *G. Castelnuovo* und *F. Enriques*, Mathematische Enzyklopädie III. C 6b, Nr. 3, 13 u. 17.

Wir setzen

(7) $$\mathfrak{E}_i = \mathfrak{B}_1^{a_{1i}} \mathfrak{B}_2^{a_{2i}} \cdots \mathfrak{B}_\varrho^{a_{\varrho i}}$$

und bekommen aus (6), wenn wir unter a_i das System $(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{\varrho i})$ und unter β das System $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varrho)$ verstehen, die Gleichungen

$$a_i b \bar{a}_i = 1, \qquad a_i b \bar{\beta} = 1,$$

oder mit Berücksichtigung von (1)

(8) $$a_i h \overline{a_i h} = 1, \qquad a_i h \overline{\beta h} = 1.$$

$a_i h$ ist ein System $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\varrho)$ und βh ist nach (1) und (2) das System $(1, 1, \ldots 1)$. Aus (8) ergibt sich dann

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \cdots + \gamma_\varrho^2 = 1 \quad \text{und} \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\varrho = 1.$$

Da alle γ_k ganz sind, so ist das nur möglich, wenn ein $\gamma_k = 1$ und alle anderen Null sind. Das ist auf ϱ verschiedene Arten möglich. Aus $a_i h = \gamma$ oder $a_i = \gamma g$ erhalten wir so ϱ verschiedene Systeme a_i, die identisch sind mit den Horizontalreihen von g. Wir können alle Lösungen von (6) und (7) zusammenfassen in der Gleichung

(9) $$a = \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11} a_{21} & \cdots & a_{\varrho 1} \\ a_{12} a_{22} & \cdots & a_{\varrho 2} \\ \vdots \; \vdots & & \vdots \\ a_{1\varrho} a_{2\varrho} & \cdots & a_{\varrho\varrho} \end{array} \right\} = g.$$

Die Kurve $\mathfrak{E}_i$ enthält also wegen der Eigenschaft 5. in der Einleitung die Kurve $\mathfrak{B}_i$ genau in der ersten Potenz, und im übrigen nur Kurven $\mathfrak{B}_k$ für $k > i$. Im besonderen ist $\mathfrak{E}_\varrho = \mathfrak{B}_\varrho$ und (vgl. Eigenschaft 5. der Einleitung)

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{B}_1^{a_{11}} \mathfrak{B}_2^{a_{21}} \cdots \mathfrak{B}_\varrho^{a_{\varrho 1}},$$

so daß wegen Eigenschaft 2. der Einleitung $\mathfrak{E}_1$ alle Kurven $\mathfrak{B}_k$ wirklich enthält.

Die Schnittpunktszahlen $(\mathfrak{E}_k, \mathfrak{B}_l)$ und $(\mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}_l)$ werden gegeben durch

(10) $$\begin{aligned}((\mathfrak{E}_k, \mathfrak{B}_l)) &= ((\mathfrak{E}_1, \mathfrak{B}_l), (\mathfrak{E}_2, \mathfrak{B}_l), \ldots, (\mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{B}_l)) \\ &= -b\bar{a} = -b\bar{g} = -h\bar{h}\bar{g} = -h\end{aligned}$$

und

(11) $$\begin{aligned}((\mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}_l)) &= ((\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_l), (\mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_l), \ldots, (\mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{E}_l)) = a((\mathfrak{E}_k, \mathfrak{B}_l)) \\ &= a(-h) = -gh = -1.\end{aligned}$$

III. Hilfssätze.

Wir betrachten eine Klasse $(\mathfrak{H})$ und setzen voraus:

(12) 1. $(\mathfrak{H}, \mathfrak{E}_{k+1}) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{E}_{k+2}) = \cdots = (\mathfrak{H}, \mathfrak{E}_\varrho) = 0$.

2. $\mathfrak{H}$ sei eine ganze Kurve aus $(\mathfrak{H})$, die durch $\mathfrak{B}_k$ teilbar ist.

Deshalb setzen wir

(13) $$\mathfrak{H} = \mathfrak{B}_k^{\sigma_k} \mathfrak{B}_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \cdots \mathfrak{B}_\varrho^{\sigma_\varrho} \mathfrak{H}_0, \quad \sigma_k > 0.$$

Unter Verwendung von (7) und (9) können wir auch schreiben

(14) $$\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_k^{\tau_k} \mathfrak{E}_{k+1}^{\tau_{k+1}} \cdots \mathfrak{E}_\varrho^{\tau_\varrho} \mathfrak{H}_0.$$

Die Kurve $\mathfrak{H}_0$ in (13) und (14) soll kein $\mathfrak{B}_i$ für $i \geqq k$ enthalten. Deshalb ist

$$(\mathfrak{H}_0, \mathfrak{B}_i) \geqq 0, \quad i \geqq k+1. \tag{15}$$

Da nach (9) die Kurve $\mathfrak{E}_i$ nur aus $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$ zusammengesetzt ist, so folgt aus (15) auch

$$(\mathfrak{H}_0, \mathfrak{E}_i) \geqq 0, \quad i \geqq k+1. \tag{16}$$

Ebenfalls wegen (9) enthält $\mathfrak{E}_k$ die Primkurve $\mathfrak{B}_k$ genau in der ersten Potenz, während $\mathfrak{B}_k$ in $\mathfrak{E}_{k+1}, \mathfrak{E}_{k+2}, \ldots, \mathfrak{E}_\varrho$ nicht enthalten ist. Deshalb ist

$$\tau_k = \sigma_k > 0. \tag{17}$$

Aus der Voraussetzung (12) und wegen (11) und (14) folgt

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{E}_i) = -\tau_i + (\mathfrak{H}_0, \mathfrak{E}_i) = 0, \quad i \geqq k+1$$

oder, unter Berücksichtigung von (16),

$$\tau_i = (\mathfrak{H}_0, \mathfrak{E}_i) \geqq 0, \quad i \geqq k+1. \tag{18}$$

Die Exponenten τ_i in (14) sind wegen (17) und (18) nicht negativ. Es besteht also der

Hilfssatz 1. Sind die Voraussetzungen (12) erfüllt, so sind alle ganzen Kurven der Klasse $(\mathfrak{H})$, die durch $\mathfrak{B}_k^{\sigma_k}$ teilbar sind, durch $\mathfrak{E}_k^{\sigma_k}$ teilbar.

Diesem Satz können wir auch die Form geben:

Sind die Voraussetzungen (12) erfüllt, so ist die Klasse $(\mathfrak{H}\,\mathfrak{B}_\mu^{-1})$ für $\mu \geqq k$, wenn sie ganze Kurven enthält und wenn $\mathfrak{E}_\mu$ nicht identisch mit $\mathfrak{B}_\mu$, d. h. keine Primkurve ist, imprimitiv, und zwar hat sie mindestens den Faktor $\mathfrak{E}_\mu\,\mathfrak{B}_\mu^{-1}$. Es sei nämlich $\mathfrak{P}$ eine ganze Kurve aus $(\mathfrak{H}\,\mathfrak{B}_\mu^{-1})$, die nicht den Faktor $\mathfrak{E}_\mu\,\mathfrak{B}_\mu^{-1}$ hat. Dann würde $\mathfrak{P}\,\mathfrak{B}_\mu$ eine ganze Kurve aus $(\mathfrak{H})$ sein, die den Faktor $\mathfrak{B}_\mu$, aber nicht den Faktor $\mathfrak{E}_\mu$ hat, was aber dem oben Gesagten widerspricht.

Aus (12) folgt noch wegen (9)

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{E}_k) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{B}_k). \tag{19}$$

Die Zahl der Bedingungen, daß eine Kurve $\mathfrak{H}$ einer Kurvenschar $\langle\mathfrak{H}\rangle$ eine Primkurve $\mathfrak{B}_k$ als Faktor enthält, ist aber höchstens gleich $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}_k) + 1$. In Verbindung mit Hilfssatz 1 und (19) können wir deshalb sagen:

Hilfssatz 2. Sind die Voraussetzungen (12) erfüllt, so ist die Zahl der Bedingungen dafür, daß eine ganze Kurve $\mathfrak{H}$ der Kurvenschar $\langle\mathfrak{H}\rangle$ die Kurve $\mathfrak{E}_k$ als Faktor enthält, höchstens gleich $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}_k) + 1 = (\mathfrak{H}, \mathfrak{E}_k) + 1$.

IV. Bildung neuer Klassen $(\mathfrak{G}_k)$.

Wir wollen aus der Klasse $(\mathfrak{C})$ eine neue Kurvenklasse $(\mathfrak{G})$ herleiten, indem wir $(\mathfrak{C})$ multiplizieren mit

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_1^{\delta_1}\,\mathfrak{B}_2^{\delta_2} \cdots \mathfrak{B}_\varrho^{\delta_\varrho}. \tag{20}$$

Es sei also

$$(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}_0) = (\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}_1^{\delta_1}\,\mathfrak{B}_2^{\delta_2} \cdots \mathfrak{B}_\varrho^{\delta_\varrho}). \tag{21}$$

Die Klasse $(\mathfrak{G})$ soll die Eigenschaft haben, daß alle Zahlen $(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_i)$ verschwinden, während nach I., 4. alle $(\mathfrak{C}, \mathfrak{B}_i)$ von Null verschieden sein sollen. Es bestehen demnach die Gleichungen

$$(22)\qquad \begin{aligned} (\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_i) &= 0\,, & i &= 1, 2, \ldots, \varrho\,, \\ (\mathfrak{C}, \mathfrak{B}_i) &= c_i > 0\,, & i &= 1; 2, \ldots, \varrho\,. \end{aligned}$$

Aus (22) ergibt sich mit (21)

$$c - \delta b = 0$$

oder, unter Berücksichtigung von (1),

$$(23)\qquad \delta = ca\,.$$

Die Exponenten δ_i sind also positiv. Wir wollen jetzt die nach (20) und (23) durch ganzzahlige positive Potenzen der $\mathfrak{B}_i$ dargestellte Kurve $\mathfrak{B}_0$ durch die $\mathfrak{E}_i$ ausdrücken. Setzen wir

$$(24)\qquad \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_1^{\delta_1}\mathfrak{B}_2^{\delta_2}\cdots\mathfrak{B}_\varrho^{\delta_\varrho} = \mathfrak{E}_1^{\varepsilon_1}\mathfrak{E}_2^{\varepsilon_2}\cdots\mathfrak{E}_\varrho^{\varepsilon_\varrho}$$

so gilt nach (7) und (9) die Gleichung

$$\delta = \varepsilon g\,,$$

oder, in Verbindung mit (1) und (23),

$$(25)\qquad \varepsilon = \delta h = cah = c\bar{g}gh = c\bar{g}\,.$$

Die Exponenten ε_i sind also wie die δ_i positiv. Sie bedeuten auch noch die Anzahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{E}_i$, denn nach (7), (9) und (22) ist

$$(26)\qquad ((\mathfrak{C}, \mathfrak{E}_i)) = c\bar{g} = \varepsilon\,.$$

Wir wollen den Übergang von der Klasse $(\mathfrak{C})$ zur Klasse $(\mathfrak{G})$ schrittweise ausführen und setzen deshalb

$$(27)\quad (\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^{\varepsilon_\varrho}) = (\mathfrak{G}_\varrho),\ (\mathfrak{G}_\varrho\,\mathfrak{E}_{\varrho-1}^{\varepsilon_{\varrho-1}}) = (\mathfrak{G}_{\varrho-1}), \ldots, (\mathfrak{G}_2\,\mathfrak{E}_1^{\varepsilon_1}) = (\mathfrak{G}_1) = (\mathfrak{G}).$$

Ferner wollen wir noch definieren

$$(28)\qquad (\mathfrak{G}_{\varrho+1}) = (\mathfrak{C})\,.$$

Die Systeme der Schnittpunktszahlen der in (27) definierten $\mathfrak{G}_k$ mit den $\mathfrak{E}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ sind dann nach (11) und (26)

$$(29)\quad ((\mathfrak{E}_i, \mathfrak{G}_k)) = ((\mathfrak{E}_i, \mathfrak{G}_1),\ (\mathfrak{E}_i, \mathfrak{G}_2), \ldots, (\mathfrak{E}_i, \mathfrak{G}_\varrho)) = \left\{\begin{array}{l} 0\ \varepsilon_1\ \varepsilon_1\ \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_1 \\ 0\ 0\ \varepsilon_2\ \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_2 \\ 0\ 0\ 0\ \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\ 0\ 0\ 0 \cdots \varepsilon_{\varrho-1} \\ 0\ 0\ 0\ 0 \cdots 0 \end{array}\right\}.$$

Wegen (9) ist

$$a\,((\mathfrak{B}_i, \mathfrak{G}_k)) = g\,((\mathfrak{B}_i, \mathfrak{G}_k)) = ((\mathfrak{E}_i, \mathfrak{G}_k))$$

und nach (1)

$$((\mathfrak{B}_i, \mathfrak{G}_k)) = h((\mathfrak{E}_i, \mathfrak{G}_k))\,,$$

also

$$(30)\quad ((\mathfrak{B}_i.\ \mathfrak{G}_k)) = ((\mathfrak{B}_i, \mathfrak{G}_1),\ (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{G}_2), \ldots, (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{G}_\varrho)) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & \varepsilon_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & \cdots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_{\varrho-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right\}.$$

Dabei sollen die Sternchen Differenzen bestimmter ε_i bedeuten.

V. Beweis, daß die Klassen $(\mathfrak{G}_k)$ regulär und vollkommen primitiv sind.

Der *Riemann-Roch*sche Satz für zwei unabhängige Veränderliche lautet

$$\{\mathfrak{T}\} + \{\mathfrak{T}'\} \geqq -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}') + p_a + 1\,.$$

Ersetzen wir $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{C}\mathfrak{F}$, wo $\mathfrak{F}$ eine ganze Kurve ist, so wird

$$\{\mathfrak{T}'\} = \{\mathfrak{K}\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}\} = \{\mathfrak{C}'\mathfrak{F}^{-1}\} = 0\,,$$

wenn

$$\{\mathfrak{C}'\} = 0$$

ist.

Da nach I. und IV. unsere in (27) definierten $\mathfrak{G}_k$ den eben angegebenen Bedingungen von $\mathfrak{T}$ genügen, so gilt in unseren Betrachtungen immer $\{\mathfrak{T}'\} = 0$. Wir können daher den *Riemann-Roch*schen Satz immer in der Form

$$(31)\qquad \{\mathfrak{T}\} \geqq -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}') + p_a + 1$$

annehmen. Gilt

$$(32)\qquad \{\mathfrak{T}\} = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}') + p_a + 1\,,$$

so heißt die Klasse $(\mathfrak{T})$ *regulär*.

Wir ersetzen $\mathfrak{T}$ in (31) durch $\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho$ und erhalten

$$(33)\qquad \begin{aligned} \{\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho\} &\geqq -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho,\ \mathfrak{K}\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{E}_\varrho^{-1}) + p_a + 1 \\ &\geqq -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}') + p_a + 1 + (\mathfrak{C}, \mathfrak{E}_\varrho) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{E}_\varrho^{-1}\mathfrak{K})\,. \end{aligned}$$

Aus (33) ergibt sich mit (4) und (5)

$$(34)\qquad \{\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho\} \geqq \{\mathfrak{C}\} + (\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{E}_\varrho) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{E}_\varrho\,\mathfrak{B})\,.$$

Andererseits ist die Zahl der Bedingungen dafür, daß eine ganze Kurve der Klasse $(\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho)$ die Kurve $\mathfrak{E}_\varrho = \mathfrak{B}_\varrho$ enthält und damit zu einer mit $\mathfrak{E}_\varrho$ multiplizierten ganzen Kurve aus $(\mathfrak{C})$ wird, höchstens gleich $(\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{B}_\varrho) + 1 = (\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{E}_\varrho) + 1$. Es besteht also die Gleichung

$$\{\mathfrak{C}\} \geqq \{\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho\} - [(\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{E}_\varrho) + 1]$$

oder

$$(35)\qquad \{\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho\} \leqq \{\mathfrak{C}\} + (\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{E}_\varrho) + 1\,.$$

Wegen (6) folgt aber aus (34) und (35)

$$(36)\qquad \{\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho\} = \{\mathfrak{C}\} + (\mathfrak{C}\mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{E}_\varrho) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{E}_\varrho\,\mathfrak{B})\,.$$

Hieraus ergibt sich auch, daß die Zahl der linear unabhängigen Bedingungen

dafür, daß eine ganze Kurve aus $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho)$ durch $\mathfrak{E}_\varrho = \mathfrak{B}_\varrho$ teilbar ist, *genau* gleich $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{E}_\varrho) + 1$ ist.

Aus (33) und (36) können wir folgern, daß auch die Gleichung

$$\{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho\} = -\tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho,\ (\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho)') + p_a + 1 \tag{37}$$

besteht, daß also nach (32) die Klasse $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho)$ *regulär* ist. Sie ist auch *primitiv*, da die Klasse $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho)$ höchstens $\mathfrak{E}_\varrho = \mathfrak{B}_\varrho$ als Faktor enthalten könnte. Diesen kann sie aber nicht enthalten, da sich aus (36) wegen (6) und (26)

$$\{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho\} > \{\mathfrak{C}\} \tag{38}$$

ergibt.

Die Klasse $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho)$ ist aber nicht nur primitiv, sondern auch *vollkommen primitiv*. Eine gemeinsame Stelle ihrer ganzen Kurven könnte nur auf $\mathfrak{E}_\varrho = \mathfrak{B}_\varrho$ liegen, da die ganzen Kurven aus $(\mathfrak{C})$ keine festen Stellen haben. Dann würde aber die Zahl der Bedingungen dafür, daß eine ganze Kurve aus $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho)$ durch $\mathfrak{B}_\varrho$ teilbar sein soll, kleiner als $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{B}_\varrho) + 1$, was dem oben gewonnenen Ergebnis widerspricht.

Da $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho)$ eine reguläre und vollkommen primitive Klasse ist, so können wir in den oben angestellten Überlegungen $\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho$ statt $\mathfrak{C}$ schreiben, und wir erhalten aus (36) bis (38) die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^2\} = \{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho\} + (\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^2,\ \mathfrak{E}_\varrho) - \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{E}_\varrho,\ \mathfrak{E}_\varrho\,\mathfrak{B}) \\ &\{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^2\} = -\tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^2,\ (\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^2)') + p_a + 1 \qquad (39) \\ &\{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^2\} > \{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho\}, \end{aligned}$$

und es ergibt sich ebenso wie oben, daß die Klasse $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^2)$ regulär und vollkommen primitiv ist.

Indem wir immer wieder $\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho$ statt $\mathfrak{C}$ schreiben, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^\nu\} = \{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^{\nu-1}\} + (\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^\nu,\ \mathfrak{E}_\varrho) - \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{E}_\varrho,\ \mathfrak{E}_\varrho\,\mathfrak{B}) \\ &\{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^\nu\} = -\tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^\nu,\ (\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^\nu)') + p_a + 1 \qquad (40) \\ &\{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^\nu\} > \{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^{\nu-1}\}, \qquad\qquad \nu = 1, 2, \ldots, \varepsilon_\varrho\,. \end{aligned}$$

Nacheinander finden wir also, daß alle Klassen $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho)$, $(\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^2), \ldots, (\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^{\varepsilon_\varrho}) = (\mathfrak{G}_\varrho)$ regulär und vollkommen primitiv sind.

Summieren wir (40) über $\nu = 1$ bis $\nu = \varepsilon_\varrho$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{G}_\varrho\} = \{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^{\varepsilon_\varrho}\} &= \{\mathfrak{C}\} + \{\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}_\varrho^{\varepsilon_\varrho},\ \mathfrak{E}_\varrho^{\varepsilon_\varrho}) - \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{E}_\varrho^{\varepsilon_\varrho},\ \mathfrak{E}_\varrho^{\varepsilon_\varrho}\,\mathfrak{B}) \qquad (41) \\ \{\mathfrak{G}_\varrho\} &= -\tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{G}_\varrho,\ \mathfrak{G}_\varrho') + p_a + 1\,. \end{aligned}$$

Wir nehmen jetzt an, daß die Klasse $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\,\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1})$ regulär und vollkommen primitiv ist und wollen zeigen, daß dann auch die Klasse $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\,\mathfrak{E}_\mu^\nu)$ regulär und vollkommen primitiv ist. Nach (31) und (32) bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{G}_{\mu+1}\,\mathfrak{E}_\mu^\nu\} &\geqq -\tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{G}_{\mu+1}\,\mathfrak{E}_\mu^\nu,\ \ \mathfrak{R}\,\mathfrak{G}_{\mu+1}^{-1}\,\mathfrak{E}_\mu^{-\nu}\ \ ) + p_a + 1 \qquad (42) \\ \{\mathfrak{G}_{\mu+1}\,\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1}\} &= -\tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{G}_{\mu+1}\,\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1},\ \mathfrak{R}\,\mathfrak{G}_{\mu+1}^{-1}\,\mathfrak{E}_\mu^{-\nu+1}) + p_a + 1\,. \end{aligned}$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich durch Subtraktion wegen (4)

$$\{\mathfrak{G}_{\mu+1}\,\mathfrak{E}_\mu^\nu\} \geqq \{\mathfrak{G}_{\mu+1}\,\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1}\} + (\mathfrak{G}_{\mu+1}\,\mathfrak{E}_\mu^\nu,\ \mathfrak{E}_\mu) - \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{E}_\mu,\ \mathfrak{E}_\mu\,\mathfrak{B}). \tag{43}$$

Nach (11) und (29) ist aber

$$(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu, \mathfrak{E}_i) = 0, \qquad i = \mu+1, \quad \mu+2, \ldots, \varrho.$$

Die Kurven $\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu$ erfüllen also die Voraussetzungen (12) unserer in III. abgeleiteten Hilfssätze. Deshalb enthält eine ganze Kurve der Kurvenschar $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu)$ gleich die Kurve $\mathfrak{E}_\mu$, wenn sie $\mathfrak{B}_\mu$ enthält, und die Zahl der Bedingungen, daß eine ganze Kurve der Klasse $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu)$ die Kurve $\mathfrak{E}_\mu$ enthält und damit zu einer mit $\mathfrak{E}_\mu$ multiplizierten ganzen Kurve aus $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1})$ wird, ist höchstens gleich $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu, \mathfrak{B}_\mu) + 1 = (\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu, \mathfrak{E}_\mu) + 1$. Es besteht also die Gleichung

$$\{\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1}\} \geqq \{\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu\} - [(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu, \mathfrak{E}_\mu) + 1]$$

oder

$$(44) \qquad \{\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu\} \leqq \{\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1}\} + (\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu, \mathfrak{E}_\mu) + 1\,.$$

Wegen (6) folgt aber aus (43) und (44)

$$(45) \quad \{\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu\} = \{\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1}\} + (\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu, \mathfrak{E}_\mu) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_\mu, \mathfrak{E}_\mu\mathfrak{B})\,.$$

Hieraus ergibt sich auch, daß die Zahl der Bedingungen dafür, daß eine ganze Kurve der Klasse $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu)$ durch $\mathfrak{B}_\mu$ und damit durch $\mathfrak{E}_\mu$ teilbar ist, *genau* gleich $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu, \mathfrak{B}_\mu) + 1 = (\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu, \mathfrak{E}_\mu) + 1$ ist.

Wir schreiben statt (42) und (45)

$$(46) \qquad \{\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu\} = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu, (\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu)') + p_a + 1\,.$$

Die Klasse $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu)$ ist also *regulär*, wenn $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1})$ es ist.

Aus (45) ergibt sich wegen (6) und (29)

$$(47) \qquad \{\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu\} > \{\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1}\}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \varepsilon_\mu.$$

Die ganzen Kurven der Klasse $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu)$ können also nicht sämtlich die Kurve $\mathfrak{E}_\mu$, oder wegen unseres Hilfssatzes 1, nicht sämtlich die Kurve $\mathfrak{B}_\mu$ enthalten. Damit die Klasse $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu)$ aber wirklich primitiv ist, darf sie auch kein $\mathfrak{B}_k$ für $k > \mu$ als einen allen ihren ganzen Kurven gemeinsamen Faktor enthalten.

Daß sie einen solchen Faktor nicht haben kann, zeigen wir indirekt. Wir nehmen an, die Klasse $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu)$ hat $\mathfrak{B}_k$ als Faktor, dann hat sie wegen unseres Hilfssatzes 1 gleich $\mathfrak{E}_k$ als Faktor. Dieser Faktor $\mathfrak{E}_k$ kann aber nur ein echter Teiler von $\mathfrak{E}_\mu$ sein, da wir zu der als vollkommen primitiv vorausgesetzten Klasse $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1})$ nur die Kurve $\mathfrak{E}_\mu$ hinzugefügt haben, und da, wie wir schon gesehen haben, die Klasse $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu)$ nicht den Faktor $\mathfrak{E}_\mu$ hat.

Wir zerlegen $\mathfrak{E}_\mu$ folgendermaßen:

$$(48) \qquad \mathfrak{E}_\mu = \mathfrak{B}_\mu \mathfrak{E}_k^a \mathfrak{E}_{\lambda_1} \mathfrak{E}_{\lambda_2} \cdots \mathfrak{E}_{\lambda_n}, \qquad a \geqq 1\,,$$

wo k und alle λ_i größer als μ und diese von k verschieden sind. Durch Zusammensetzen mit $\mathfrak{E}_k$ erhalten wir aus (48) unter Berücksichtigung von (11)

$$0 = (\mathfrak{B}_\mu, \mathfrak{E}_k) - a$$

oder

$$(49) \qquad a = (\mathfrak{B}_\mu, \mathfrak{E}_k), \qquad k > \mu\,.$$

Wegen (10) und Einleitung 5. kann α in (49) nur 0 oder 1 sein. Daher muß wegen (48) aber $\alpha = 1$ sein.

Wir setzen

$$(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu) = (\mathfrak{H}) = \mathfrak{E}_k(\mathfrak{H}_0). \tag{50}$$

Es ist also

$$\{\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu\} = \{\mathfrak{H}\} = \{\mathfrak{H}_0\}. \tag{51}$$

Dabei ist es gleichgültig, ob $(\mathfrak{H}_0)$ noch Kurven $\mathfrak{E}_i$ für $\mu < i \neq k$ enthält oder nicht.

Aus (49) und (50) folgt aber, wenn wir $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}_\mu$ zusammensetzen,

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}_\mu) = (\mathfrak{H}_0, \mathfrak{B}_\mu) + 1. \tag{52}$$

Da die ganzen Kurven aus $(\mathfrak{H})$ alle nach Annahme den Faktor $\mathfrak{E}_k$ haben, so ist die Zahl der Bedingungen dafür, daß eine Kurve aus $(\mathfrak{H})$ durch $\mathfrak{B}_\mu$, und damit durch $\mathfrak{E}_\mu$, teilbar ist, höchstens gleich $(\mathfrak{H}_0, \mathfrak{B}_\mu) + 1 = (\mathfrak{H}, \mathfrak{B}_\mu)$, während wir infolge von (45) für die Zahl dieser Bedingungen die Zahl $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}_\mu) + 1$ gefunden haben. Es ergibt sich also aus unserer Annahme ein Widerspruch, d. h. es ist die Klasse $(\mathfrak{H}) = (\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu)$ *primitiv*, wenn die Klasse $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1})$ es ist.

Sie ist auch *vollkommen primitiv*, wenn $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1})$ vollkommen primitiv ist. Denn eine gemeinsame feste Stelle ihrer ganzen Kurven könnte nur auf $\mathfrak{E}_\mu$ liegen, da die ganzen Kurven aus $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1})$ keine festen Stellen haben. Da $\mathfrak{E}_\mu$ nur Kurven $\mathfrak{B}_k$ mit $k \geqq \mu$ enthält, so könnten feste Stellen nur auf diesen Kurven liegen. Läge eine auf einer Kurve $\mathfrak{B}_k$, wenn $k > \mu$, so würden die ganzen Kurven aus $(\mathfrak{H})$ mindestens einen Schnittpunkt mit $\mathfrak{B}_k$ haben, während nach (10) und (30) doch $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}_k) = 0$ ist für $k > \mu$. Läge eine feste Stelle auf $\mathfrak{B}_\mu$, so würde die Zahl der Bedingungen dafür, daß eine ganze Kurve aus $(\mathfrak{H})$ durch $\mathfrak{B}_\mu$ teilbar ist, kleiner als $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}_\mu) + 1 = (\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu, \mathfrak{E}_\mu) + 1$, was wegen (45) nicht sein darf.

Die Klasse $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^\nu)$ ist also regulär und vollkommen primitiv, wenn die Klasse $(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\nu-1})$ regulär und vollkommen primitiv ist.

Da, wie wir fanden, alle Klassen

$$(\mathfrak{G}_{\varrho+1}\mathfrak{E}_\varrho),\ (\mathfrak{G}_{\varrho+1}\mathfrak{E}_\varrho^2), \ldots, (\mathfrak{G}_{\varrho+1}\mathfrak{E}_\varrho^{\varepsilon_\varrho}) = (\mathfrak{G}_\varrho)$$

— wenn wir an die Definitionen (27) und (28) denken — regulär und vollkommen primitiv sind, so sind also auch alle Klassen

$$(\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu),\ (\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^2), \ldots, (\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\varepsilon_\mu}) = (\mathfrak{G}_\mu)$$

und damit auch alle Klassen

$$(\mathfrak{G}_\varrho),\ (\mathfrak{G}_{\varrho-1}), \ldots, (\mathfrak{G}_1) = (\mathfrak{G})$$

regulär und vollkommen primitiv.

Wir summieren noch die Gleichungen (45) und (46) über alle ν von 1 bis ε_μ und erhalten

$$\{\mathfrak{G}_\mu\} = \{\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\varepsilon_\mu}\} = \{\mathfrak{G}_{\mu+1}\} + (\mathfrak{G}_{\mu+1}\mathfrak{E}_\mu^{\varepsilon_\mu}, \mathfrak{E}_\mu^{\varepsilon_\mu}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_\mu^{\varepsilon_\mu}, \mathfrak{E}_\mu^{\varepsilon_\mu}\mathfrak{B}) \tag{53}$$

$$\{\mathfrak{G}_\mu\} = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}_\mu, \mathfrak{G}'_\mu) + p_a + 1.$$

Summieren wir wieder über alle μ von 1 bis ϱ, so erhalten wir

$$\{\mathfrak{G}\} = \{\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}_0\} = \{\mathfrak{C}\} + (\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_0) - \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_0\mathfrak{B}) \tag{54}$$

$$\{\mathfrak{G}\} = -\tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')\,p_a + 1\,.$$

Die Dimension $\{\mathfrak{G}_\mu\}$ von $(\mathfrak{G}_\mu)$, also auch $\{\mathfrak{G}\}$, ist immer größer als vier, weil $\{\mathfrak{C}\} \geqq 4$ gewählt ist.

VI. Die Transformation der Kurven $\mathfrak{B}_k$ in einen gewöhnlichen Punkt.

Es sei $\{\mathfrak{G}\} = r > 4$. Da außerdem die Klasse $(\mathfrak{G})$ regulär und vollkommen primitiv ist, so können wir aus $(\mathfrak{G})$ linear unabhängige ganze Kurven

$$\mathfrak{G}^{(1)}, \mathfrak{G}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{G}^{(r)}$$

auswählen, die keinen allen gemeinsamen Teiler und keine allen gemeinsame Punkte haben. Wir setzen

$$\mathfrak{G}^{(1)} : \mathfrak{G}^{(2)} : \cdots : \mathfrak{G}^{(r)} = x_1 : x_2 : \cdots : x_r$$

und deuten die x_k als homogene Punktkoordinaten einer Fläche G im Raume von $r-1$ Dimensionen. Da zufolge der Wahl von $(\mathfrak{G})$ die Gleichung (22), $(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_k) = 0$, besteht, so entsprechen den Kurven $\mathfrak{B}_k$ auf G Punkte. Aber alle diese Kurven müssen bei der Transformation in denselben Punkt der Fläche G übergehen, da die Kurven der Gruppe $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$ durch Schnittpunkte miteinander zusammenhängen. Dieser Punkt heiße P. Es bleibt zu zeigen, daß P ein gewöhnlicher Punkt von G ist. Um das zu beweisen, betrachten wir die durch P gehenden ebenen Schnitte von G und zeigen, daß diese dasselbe Geschlecht haben wie ein allgemeiner ebener Schnitt von G. Ein ebener Schnitt von G ist

$$\mathfrak{A} = a_1\mathfrak{G}^{(1)} + a_2\mathfrak{G}^{(2)} + \cdots + a_r\mathfrak{G}^{(r)},$$

wo die a_i Konstante sind. Da die ganzen Kurven aus $(\mathfrak{G})$ im allgemeinen keine mehrfachen Punkte haben, so gilt für das Geschlecht $\pi(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ die Gleichung

$$2\pi(\mathfrak{A}) - 2 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}\,\mathfrak{K}). \tag{55}$$

Der ebene Schnitt $\mathfrak{A}$ geht dann und nur dann durch P, wenn $\mathfrak{A}$ durch die Kurven $\mathfrak{B}_k$ teilbar ist. Dazu ist, wie es sein muß, *eine* Bedingung notwendig und hinreichend. Es muß nämlich $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}_1$ teilbar werden, wozu $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1) + 1 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_1) + 1$, oder, wegen (27) und (30), genau $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{B}_1) + 1 = 1$ Bedingung hinreichend ist. Dann aber wird wegen unseres Hilfssatzes 1 in III. der ebene Schnitt $\mathfrak{A}$ von selbst durch $\mathfrak{E}_1$ teilbar, und zwar genau durch $\mathfrak{E}_1$, da die Klasse $(\mathfrak{G}\,\mathfrak{E}_1^{-1})$ nach V. vollkommen primitiv ist. Wir nehmen an, $\mathfrak{A}$ sei durch $\mathfrak{E}_1$ teilbar und setzen $\mathfrak{A} = \mathfrak{E}_1\mathfrak{A}_0$. Die Gesamtheit der Kurven $\mathfrak{A}_0$ entspricht dann den durch P gehenden ebenen Schnitten von G. Da die Klasse $(\mathfrak{G}\,\mathfrak{E}_1^{-1})$, der die Kurven $\mathfrak{A}_0$ angehören, vollkommen primitiv ist, so haben die $\mathfrak{A}_0$ keine allen gemeinsame Stellen und es gibt unter den $\mathfrak{A}_0$ Primkurven ohne mehrfache Stellen. Für das Geschlecht $\pi(\mathfrak{A}_0)$ einer solchen Kurve gilt

$$2\pi(\mathfrak{A}_0) - 2 = (\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_0\,\mathfrak{K}) = (\mathfrak{G}\,\mathfrak{E}_1^{-1}, \mathfrak{G}\,\mathfrak{E}_1^{-1}\,\mathfrak{K}) \tag{56}$$

$$= (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}\,\mathfrak{K}) - 2\,(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{G}) + (\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_1) - (\mathfrak{E}_1, \mathfrak{K}).$$

Hieraus folgt aber wegen (4), (6) und (29)

$$2\,\pi(\mathfrak{A}_0) - 2 = 2\,\pi(\mathfrak{A}) - 2$$

oder

$$\pi(\mathfrak{A}_0) = \pi(\mathfrak{A}). \tag{57}$$

Der Punkt P ist also ein gewöhnlicher Punkt.

Schließlich kann man die Fläche G in einen Raum von drei Dimensionen projizieren, wobei man immer erreichen kann, daß dem gewöhnlichen Punkt P von G ein gewöhnlicher Punkt der neuen Fläche entspricht.

Schluß.

Wir haben angenommen, daß die Bedingungen 1.—6. der Einleitung erfüllt sind und haben nur unter diesen Voraussetzungen eine Transformation aufgebaut, die uns gestattet, die ϱ Kurven $\mathfrak{B}_k$ in einen gewöhnlichen Punkt zu transformieren. Damit ist bewiesen, daß die angegebenen Bedingungen *nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend* sind dafür, daß die ϱ Kurven $\mathfrak{B}_k$ eine *Gruppe ausgezeichneter Kurven erster Art* bilden.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. *Jung*, für die Anregung der Arbeit sowie für das rege Interesse und die wertvollen Ratschläge bei ihrer Ausführung auch an dieser Stelle ergebenst zu danken.

Über die Näherungsnenner Stieltjesscher Kettenbrüche.

Von *Walther Jänichen* in Berlin.

1. Einleitung: Aus der Theorie der Kettenbrüche ist Folgendes bekannt. Eine Potenzreihe

$$\frac{c_1}{z} - \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} - \frac{c_4}{z^4} + - \cdots \tag{1}$$

ist seminormal, das heißt, ihr entspricht ein unendlicher Kettenbruch der Form

$$\frac{1}{|b_1 z} + \frac{1}{|b_2} + \frac{1}{|b_3 z} + \frac{1}{|b_4} + \cdots, \tag{2}$$

wenn die Determinanten

$$(3)\qquad \varphi_\nu = \begin{vmatrix} c_1 & -c_2 & \cdots (-1)^{\nu-1} c_\nu \\ -c_2 & c_3 & \cdots (-1)^{\nu} c_{\nu+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{\nu-1} c_\nu & (-1)^{\nu} c_{\nu+1} & \cdots c_{2\nu-1} \end{vmatrix}, \quad \psi_\nu = \begin{vmatrix} -c_2 & c_3 & \cdots (-1)^{\nu-1} c_\nu \\ c_3 & -c_4 & \cdots (-1)^{\nu} c_{\nu+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{\nu-1} c_\nu & (-1)^{\nu} c_{\nu+1} & \cdots -c_{2\nu-2} \end{vmatrix}$$

$(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ $\qquad$ $(\nu = 2, 3, 4, \ldots)$

von Null verschieden sind, und zwar lassen sich die b_λ in einfacher Weise durch die Determinanten φ_ν und ψ_ν ausdrücken [1]). *Stieltjes* hat nun die weitere Annahme gemacht, daß die b_λ positiv sind, was damit gleichbedeutend ist, daß

$$\begin{aligned} \varphi_\nu \varphi_{\nu-1} &> 0\,, \\ \psi_\nu \psi_{\nu+1} &< 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ist, und gezeigt [2]), daß derartige *Stieltjes*sche Kettenbrüche bemerkenswerte Eigenschaften besitzen. U. a. hat er gezeigt, daß die Wurzeln der Näherungsnenner reell, einfach und nicht positiv sind. Für die Näherungsnenner gerader Ordnung findet man leicht

$$(5)\qquad B_{2\nu}(z) = \frac{1}{\psi_{\nu+1}} \begin{vmatrix} 1 & c_1 & \cdots (-1)^{\nu-1} c_\nu \\ z & -c_2 & \cdots (-1)^{\nu} c_{\nu+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z^\nu & (-1)^{\nu} c_{\nu+1} & \cdots -c_{2\nu} \end{vmatrix} = \frac{1}{\psi_{\nu+1}} R_\nu(z)\,,$$

während man für die Nenner ungerader Ordnung folgende Darstellung gewinnt:

---

[1]) Vgl. *Perron*, Die Lehre von den Kettenbrüchen (Leipzig 1913), S. 304 und 375.

[2]) *Perron*, a. a. O. § 69.

$$(6)\quad B_{2\nu-1}(z) = \frac{z}{\varphi_\nu}\begin{vmatrix} 1 & -c_2 & \cdots (-1)^{\nu-1} c_\nu \\ z & c_3 & \cdots (-1)^{\nu} c_{\nu+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z^{\nu-1} & (-1)^{\nu} c_{\nu+1} & \cdots c_{2\nu-1} \end{vmatrix} = \frac{z}{\varphi_\nu} S_{\nu-1}(z).$$

Während nun *Stieltjes* sich zum Beweise des Wurzelsatzes der Theorie der Kettenbrüche bedient, wobei er komplexe Zahlen benutzt, wollen wir die erwähnten und einige andere Eigenschaften allein aus der Natur der in der Darstellung der $B_\lambda(z)$ auftretenden Determinanten ableiten. Von den beiden linearen Relationen (12) und (17) findet sich die eine, (12), die schon auf *Jacobi* zurückgeht, auch in der grundlegenden Arbeit von *Frobenius*, Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen (Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 114). Während *Frobenius* zum Beweise dieser Relation zwei Determinantensätze heranzieht (*Fr.* a. a. O. § 2 (1) und § 10 (2)), werden wir nur eine solche Relation benützen. Übrigens beziehen wir von vornherein unsere Untersuchung auf die allgemeinere Determinante

$$(7)\quad R_n^{(k)}(z) = \begin{vmatrix} 1 & (-1)^{k-1} c_k & \cdots (-1)^{k+n-2} c_{k+n-1} \\ z & (-1)^{k} c_{k+1} & \cdots (-1)^{k+n-1} c_{k+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z^n & (-1)^{k+n-1} c_{k+n} & \cdots (-1)^{k} c_{k+2n-1} \end{vmatrix},$$

die für $k = 1$ und $k = 2$ die Determinanten des *Stieltjes*schen Satzes liefert. In § 2 werden wir dann eine Transformation einer Determinante der Form (7) in eine andere Determinante vornehmen, deren Elemente, um mit *Frobenius* zu reden, einem rekurrierenden System angehören. Diese neue Darstellung liefert dann in § 3 eine neue Beziehung unserer Wurzelsätze zum Trägheitsgesetz der quadratischen Formen [1]).

§ 1. Wurzeleigenschaften der Gleichung $R_n^{(k)}(z) = 0$.

Wir bezeichnen die Elemente der Determinante (7) zur Abkürzung mit $a_r^{(s)}$, wo $r = 1, 2, \ldots, n+1$ und $s = 1, 2, \ldots, n+1$, die Determinante selbs tmit A, die Unterdeterminanten von A mit $A_r^{(s)}$. Dann ist nach einem allgemeinen Satz der Determinantentheorie [2]), der sich auf die aus Unterdeterminanten gebildeten Determinanten bezieht,

$$A_r^{(r)} A_s^{(s)} - A_r^{(s)} A_s^{(r)} = A\, A_{r,s}^{r,s}.$$

$A_{r,s}^{r,s}$ geht aus A hervor, wenn man die Zeilen und Spalten wegläßt, die sich in den Elementen $a_r^{(s)}$ und $a_s^{(r)}$ schneiden.

Wenden wir diesen Satz auf die Determinante $R_n^{(k)}(z)$ an, indem wir $r = 1$

---

[1]) Verwandte Fragen behandeln die neueren Arbeiten
E. Fischer, Über das Caratheodorysche Problem, Potenzreihen mit positivem reellem Teil betreffend. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 32, 1911, S. 240 ff.
M. Riesz, Sur le problème des moments. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik Bd. 17, Nr. 16, 1923.

[2]) *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra I, Braunschweig 1912, 2. Aufl. § 31.

und $s = n + 1$ setzen, so erhalten wir, wenn wir uns noch der Bezeichnung $\varphi^{(k)}_{k+n-1}$ für die Determinante

$$(8) \qquad \varphi^{(k)}_{k+n-1} = \begin{vmatrix} (-1)^{k-1} c_k & \cdots & (-1)^{k+n-2} c_{k+n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{k+n-2} c_{k+n-1} & \cdots & (-1)^{k-1} c_{k+2n-2} \end{vmatrix}$$

bedienen,

$$(9) \qquad \varphi^{(k+1)}_{k+n} R^{(k)}_{n-1}(z) - z\varphi^{(k)}_{k+n-1} R^{(k+1)}_{n-1}(z) = \varphi^{(k+1)}_{k+n-1} R^{(k)}_{n}(z) .$$

Führen wir nun die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ (-1)^{k-1} c_k & (-1)^{k} c_{k+1} & \cdots & (-1)^{k+n-1} c_{k+n} & & 1 \\ (-1)^{k} c_{k+1} & (-1)^{k+1} c_{k+2} & \cdots & (-1)^{k+n} c_{k+n+1} & & z \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ (-1)^{k+n-1} c_{k+n} & (-1)^{k+n} c_{k+n+1} & \cdots & (-1)^{k+1} c_{k+2n} & & z^n \end{vmatrix} = (-1)^n R^{(k)}_n(z)$$

ein und wenden auf sie den obigen Determinantensatz für $r = 1$ und $s = n + 2$ an, so folgt nach einigen leichten Umformungen

$$(10) \qquad \varphi^{(k)}_{k+n-1} R^{(k+1)}_{n}(z) - \varphi^{(k)}_{k+n} R^{(k+1)}_{n-1}(z) = \varphi^{(k+1)}_{k+n} R^{(k)}_{n}(z) .$$

Ersetzt man in (9) n durch $n + 1$, so ergibt sich

$$(11) \qquad \varphi^{(k+1)}_{k+n+1} R^{(k)}_{n}(z) - z\varphi^{(k)}_{k+n+1} R^{(k)}_{n}(z) = \varphi^{(k+1)}_{k+n} R^{(k)}_{n-1}(z)$$

und durch Elimination von $R^{(k+1)}_{n-1}(z)$ und $R^{(k+1)}_{n}(z)$ aus (9), (10) und (11) erhält man endlich die folgende Rekursionsformel für die $R^{(k)}_n(z)$:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \left[\varphi^{(k)}_{k+n-1}\right]^2 \varphi^{(k+1)}_{k+n} R^{(k)}_{n+1}(z) = \Big\{ &\left[\varphi^{(k)}_{k+n-1}\right]^2 \varphi^{(k+1)}_{k+n+1} + \left[\varphi^{(k)}_{k+n}\right]^2 \varphi^{(k+1)}_{k+n-1} \\ &- z\varphi^{(k)}_{k+n-1} \varphi^{(k)}_{k+n} \varphi^{(k+1)}_{k+n} \Big\} R^{(k)}_{n}(z) - \left[\varphi^{(k)}_{k+n}\right]^2 \varphi^{(k+1)}_{k+n} R^{(k)}_{n-1}(z) . \end{aligned}$$

Multiplizieren wir endlich $R^{(k)}_n(z)$ mit $\dfrac{(-1)^n}{\varphi^{(k)}_{k+n-1}}$, um eine ganze rationale Funktion zu bekommen, die mit z^n anfängt, und setzen

$$(13) \qquad G^{(k)}_n(z) = \frac{(-1)^n R^{(k)}_n(z)}{\varphi^{(k)}_{k+n-1}} = z^n + \cdots + (-1)^n \frac{\varphi^{(k+1)}_{k+n}}{\varphi^{(k)}_{k+n-1}} ,$$

so gilt für die $G^{(k)}_n(z)$ die Rekursionsformel, nachdem wir noch n durch $n - 1$ ersetzt haben,

$$(14) \qquad \begin{aligned} G^{(k)}_n(z) = \Big\{ z - &\frac{1}{\varphi^{(k)}_{k+n-2} \varphi^{(k)}_{k+n-1} \varphi^{(k+1)}_{k+n-1}} \left(\left[\varphi^{(k)}_{k+n-2}\right]^2 \varphi^{(k+1)}_{k+n}\right. \\ &\left. + \left[\varphi^{(k)}_{k+n-1}\right]^2 \varphi^{(k+1)}_{k+n-2}\right) \Big\} G^{(k)}_{n-1}(z) - \frac{\varphi^{(k)}_{k+n-2} \varphi^{(k)}_{k+n}}{\left[\varphi^{(k)}_{k+n-1}\right]^2} G^{(k)}_{n-2}(z) . \end{aligned}$$

Eine zweite wichtige Rekursionsformel ergibt sich in folgender Weise. Wir ersetzen in (10) n durch $n - 1$ und erhalten

$$(15) \qquad \varphi^{(k)}_{k+n-1} R^{(k+1)}_{n-1}(z) - \varphi^{(k)}_{k+n-1} R^{(k+1)}_{n-2}(z) = \varphi^{(k)}_{k+n-1} R^{(k)}_{n-1}(z) ,$$

und in (9) ersetzen wir k durch $k+1$ und n durch $n-2$, worauf folgt

$$\varphi_{k+n}^{(k+2)} R_{n-2}^{(k+1)}(z) - z\,\varphi_{k+n-1}^{(k+1)} R_{n-2}^{(k+2)}(z) = \varphi_{k+n-1}^{(k+2)} R_{n-1}^{(k)}(z)\,. \tag{16}$$

Aus (9), (15) und (16) erhält man dann nach Elimination von $R_{n-1}^{(k)}(z)$ und $R_{n-2}^{(k+1)}(z)$ die neue Recursionsformel

$$\begin{aligned}\left[\varphi_{k+n-1}^{(k+1)}\right]^2 \varphi_{k+n}^{(k+1)} R_n^{(k)}(z) = \big(&\varphi_{k+n-2}^{(k)} \varphi_{k+n}^{(k+1)} \varphi_{k+n}^{(k+2)} - \varphi_{k+n-1}^{(k)} \varphi_{k+n}^{(k+1)} \varphi_{k+n-1}^{(k+2)} \\ &- z\,\varphi_{k+n-1}^{(k)} \varphi_{k+n-1}^{(k+1)} \varphi_{k+n}^{(k+2)}\big) R_{n-1}^{(k+1)}(z) - z\,\varphi_{k+n-1}^{(k)} \varphi_{k+n-1}^{(k+1)} \varphi_{k+n}^{(k+1)} R_{n-2}^{(k+2)}(z)\,,\end{aligned} \tag{17}$$

die wir später noch weiter vereinfachen wollen.

Für die weitere Untersuchung müssen wir nun eine Formel ableiten, die uns zeigt, daß die $\varphi_\lambda^{(k)}$ nicht unabhängig sind voneinander. Es läßt sich nämlich zeigen, daß die Größen $\varphi_\lambda^{(k+2)}$ bekannt sind, wenn man die $\varphi_\lambda^{(k)}$ und $\varphi_\lambda^{(k+1)}$ kennt und zwar besteht folgende Relation

$$\varphi_n^{(k+2)} = \varphi_{n-1}^{(k)} \sum_{\lambda=k}^{n-1} \frac{\left[\varphi_\lambda^{(k+1)}\right]^2}{\varphi_{\lambda-1}^{(k)} \varphi_\lambda^{(k)}}\,. \tag{18}$$

Beweis: Aus (10) folgt für $z=0$, da $R_n^{(k)}(0) = \varphi_{k+n}^{(k+1)}$,

$$\varphi_{k+n+1}^{(k+2)} \varphi_{k+n-1}^{(k)} - \varphi_{k+n}^{(k+2)} \varphi_{k+n}^{(k)} = \left[\varphi_{k+n}^{(k+1)}\right]^2 \tag{19}$$

oder

$$\varphi_{k+n+1}^{(k+2)} = \frac{\left[\varphi_{k+n}^{(k+1)}\right]^2}{\varphi_{k+n-1}^{(k)}} + \frac{\varphi_{k+n}^{(k)}}{\varphi_{k+n-1}^{(k)}}\, \varphi_{k+n}^{(k+2)}\,.$$

Ersetzt man hierin nacheinander n durch $n-1$, $n-2$, …, 2 und eliminiert aus den so entstehenden Gleichungen nacheinander die Größen $\varphi_{k+n-1}^{(k+2)}$, $\varphi_{k+n-2}^{(k+2)}$, …, $\varphi_{k+3}^{(k+2)}$, so erhält man

$$\varphi_{k+n}^{(k+2)} = \varphi_{k+n-1}^{(k)} \left(\frac{\left[\varphi_{k+n-1}^{(k+1)}\right]^2}{\varphi_{k+n-2}^{(k)} \varphi_{k+n-1}^{(k)}} + \frac{\left[\varphi_{k+n-2}^{(k+1)}\right]^2}{\varphi_{k+n-3}^{(k)} \varphi_{k+n-2}^{(k)}} + \cdots + \frac{\left[\varphi_{k+2}^{(k+1)}\right]^2}{\varphi_{k+1}^{(k)} \varphi_{k+2}^{(k)}} + \frac{\varphi_{k+2}^{(k+2)}}{\varphi_{k+1}^{(k)}} \right).$$

Nun ist

$$\varphi_{k+1}^{(k)} = \begin{vmatrix} (-1)^{k+1} c_k & (-1)^k c_{k+1} \\ (-1)^k c_{k+1} & (-1)^{k+1} c_{k+2} \end{vmatrix} = c_k c_{k+2} - c_{k+1}^2\,,$$

also

$$\varphi_{k+2}^{(k+2)} = (-1)^{k+1} c_{k+2} = (-1)^{k+1} \frac{\varphi_{k+1}^{(k+1)} + c_{k+1}^2}{c_k}\,,$$

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_{k+1}^{(k+2)}}{\varphi_{k+1}^{(k)}} &= (-1)^{k+1} \frac{c_{k+1}^2}{c_k \varphi_{k+1}^{(k)}} + \frac{(-1)^{k+1}}{c_k} \\ &= \frac{\left[\varphi_{k+1}^{(k+1)}\right]^2}{\varphi_k^{(k)} \varphi_{k+1}^{(k)}} + \frac{\left[\varphi_k^{(k+1)}\right]^2}{\varphi_{k-1}^{(k)} \varphi_k^{(k)}}\,,\end{aligned}$$

wobei $\varphi_{k-1}^{(k)} = 1$ zu setzen ist. Ersetzt man das letzte Glied $\frac{\varphi_{k+2}^{(k+2)}}{\varphi_{k+1}^{(k)}}$ der obigen Klammer durch diese Summe und schreibt n statt $k+n$, so erhält man Formel (18).

Wir benutzen (19), um (17) noch weiter umzuformen. Die beiden ersten Glieder der auf der rechten Seite von (17) stehenden Klammern ergeben nämlich

$$\varphi_{k+n}^{(k+1)}\,(\varphi_{k+n}^{(k+2)}\,\varphi_{k+n-2}^{(k)} - \varphi_{k+n-1}^{(k+2)}\,\varphi_{k+n-1}^{(k)}),$$

also nach (19) mit $n-1$ statt n

$$\varphi_{k+n}^{(k+1)}\,[\varphi_{k+n-1}^{(k+1)}]^2.$$

Benutzen wir endlich noch (13), so folgt aus (17) die Rekursionsformel

$$(20)\quad G_n^{(k)}(z) = \left(z - \frac{\varphi_{k+n-1}^{(k+1)}\,\varphi_{k+n}^{(k+1)}}{\varphi_{k+n-1}^{(k)}\,\varphi_{k+n}^{(k+2)}}\right) G_{n-1}^{(k+1)}(z) - z\,\frac{\varphi_{k+n}^{(k+1)}\,\varphi_{k+n-1}^{(k+2)}}{\varphi_{k+n-1}^{(k+1)}\,\varphi_{k+n}^{(k+2)}}\,G_{n-2}^{(k+2)}(z).$$

Aus (18) leiten wir weiter einen wichtigen Satz über das Vorzeichen der Determinanten $\varphi_\lambda^{(k)}$ ab, indem wir die *Stieltjes*sche Voraussetzung in der etwas allgemeineren Form

$$(21)\qquad \operatorname{sign}(\varphi_\nu^{(1)}\varphi_{\nu-1}^{(1)}) = \varepsilon, \quad \operatorname{sign}(\varphi_\nu^{(2)}\varphi_{\nu+1}^{(2)}) = -\varepsilon$$

ansetzen, wobei ε gleich $+1$ oder -1 ist. Dann ergibt sich mit Leichtigkeit aus (18)

$$\operatorname{sign}(\varphi_\nu^{(1)}\varphi_{\nu+1}^{(1)}) = \operatorname{sign}(\varphi_\nu^{(3)}\varphi_{\nu+1}^{(3)}) = \cdots = \operatorname{sign}(\varphi_\nu^{(2\lambda+1)}\varphi_{\nu+1}^{(2\lambda+1)}) = \varepsilon,$$

$$\operatorname{sign}(\varphi_\nu^{(2)}\varphi_{\nu+1}^{(2)}) = \operatorname{sign}(\varphi_\nu^{(4)}\varphi_{\nu+1}^{(4)}) = \cdots = \operatorname{sign}(\varphi_\nu^{(2\lambda)}\varphi_{\nu+1}^{(2\lambda)}) = -\varepsilon$$

oder allgemein

$$(22)\qquad \operatorname{sign}(\varphi_\nu^{(k)}\varphi_{\nu+1}^{(k)}) = (-1)^{k-1}\,\varepsilon.$$

Aus (22) folgt noch, daß

$$(23)\qquad \operatorname{sign}(\varphi_\nu^{(k)}\varphi_{\nu+2}^{(k)}) = +1$$

ist.

Wir gehen nun zur Ableitung der Wurzeleigenschaften der Gleichung $R_n^{(k)}(z) = 0$ oder $G_n^{(k)}(z) = 0$ über. Die Rekursionsformel (14) für die Funktionen $G_n^{(k)}(z)$ gilt auch noch für $n = 2$, wenn man

$$(24)\qquad G_0^{(k)}(z) = 1 \quad \text{und} \quad \varphi_k^{(k+1)} = 1$$

setzt. Dann läßt sich zeigen, daß die Funktionen

$$(25)\qquad G_n^{(k)}(z), \quad G_{n-1}^{(k)}(z), \ldots, G_1^{(k)}(z), \quad G_0^{(k)}(z)$$

eine *Sturm*sche Kette bilden. Denn ihnen kommen folgende vier Eigenschaften zu, die zur Charakterisierung einer *Sturm*schen Kette genügen und sich leicht mit Benutzung von (14), (23) und (24) beweisen lassen:

1. Das Endglied der Reihe (25) hat für jeden Wert von z dasselbe Vorzeichen, nämlich das positive.
2. Von den Funktionen $G_n^{(k)}(z)$ können nicht zwei aufeinanderfolgende für denselben Wert von z verschwinden.
3. Verschwindet ein mittleres Glied der Reihe für einen Wert von z, so haben für diesen Wert die beiden benachbarten Glieder entgegengesetztes Vorzeichen.
4. $G_n^{(k)}(z)$ ist vom Grade n, und der Koeffizient der höchsten Potenz z^n ist positiv.

Für eine solche besondere, durch (4) charakterisierte *Sturm*sche Kette gilt nun der Satz, daß alle Wurzeln von $G_n^{(k)}(z) = 0$ reell und verschieden sind, und zwar liegt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln eine und nur eine Wurzel von $G_{n-1}^{(k)}(z) = 0$. Weiter läßt sich zeigen, daß alle Wurzeln negativ sind. Wir betrachten zu dem Zweck das Intervall $\alpha = -\infty$, $\beta = 0$. Dann ist

$$\operatorname{sign} G_n^{(k)}(\alpha) = (-1)^n, \ldots, \quad \operatorname{sign} G_1^{(k)}(\alpha) = -1, \qquad \operatorname{sign} G_0^{(k)}(\alpha) = +1.$$

Für $z = \beta = 0$ ist nach (13)

$$\operatorname{sign} G_n^{(k)}(\beta) = (-1)^n \operatorname{sign}\left(\frac{\varphi_{k+n}^{(k+1)}}{\varphi_{k+n-1}^{(k)}}\right), \ldots, \operatorname{sign} G_1^{(k)}(\beta) = (-1) \operatorname{sign}\left(\frac{\varphi_{k+1}^{(k+1)}}{\varphi_k^{(k)}}\right),$$

$$\operatorname{sign} G_0^{(k)}(\beta) = \operatorname{sign}\left(\frac{\varphi_k^{(k+1)}}{\varphi_{k-1}^{(k)}}\right).$$

Nun ist aber nach (22)

$$\operatorname{sign}\left[G_n^{(k)}(\beta)\, G_{n-1}^{(k)}(\beta)\right] = (-1)^n(-1)^{n-1}(-1)^k(-1)^{k-1} = +1,$$

also

$$\operatorname{sign} G_n^{(k)}(\beta) = \operatorname{sign} G_{n-1}^{(k)}(\beta).$$

Es gehen daher im Intervall $-\infty \cdots 0$ n Zeichenwechsel verloren, d. h. in diesem Intervall liegen n Wurzeln der Gleichung $G_n^{(k)}(z) = 0$. Mithin ist jetzt bewiesen

Satz I: Unter der Voraussetzung

$$\operatorname{sign}\left(\varphi_\nu^{(1)} \varphi_{\nu-1}^{(1)}\right) = \varepsilon, \quad \operatorname{sign}\left(\varphi_\nu^{(2)} \varphi_{\nu+1}^{(2)}\right) = -\varepsilon, \qquad \varepsilon = \pm 1$$

sind alle Wurzeln von $R_n^{(k)}(z) = 0$ negativ und verschieden, und zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln von $R_n^{(k)}(z) = 0$ liegt eine und nur eine Wurzel von $R_{n-1}^{(k)}(z) = 0$.

Außer zu der *Sturm*schen Kette (25) gehört $G_n^{(k)}(z)$ noch einer anderen Kette an. Es läßt sich nämlich zeigen, daß auch die Funktionen

$$(26) \qquad G_n^{(k)}(z), \quad G_{n-1}^{(k+1)}(z), \ldots, G_1^{(k+n-1)}(z), \quad G_0^{(k+n)}(z)$$

eine *Sturm*sche Kette bilden. Um dies nachzuweisen, benutzen wir die Recursionsformel (20), aus der sich die oben angegebenen Kennzeichen einer *Sturm*schen Kette leicht ablesen lassen, wenn man noch bedenkt, daß jede Wurzel einer Gleichung $G_{n-1}^{(k+1)}(z) = 0$ negativ ist, also

$$\operatorname{sign}\left[-z\,\frac{\varphi_{k+n}^{(k+1)}\,\varphi_{k+n-1}^{(k+2)}}{\varphi_{k+n-1}^{(k+1)}\,\varphi_{k+n}^{(k+2)}}\right] = (-1)\,(-1)\,(-1)^k(-1)^{k+1} = -1.$$

Als Ergänzung zu obigem Satz haben wir also den folgenden

Satz II: Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln der Gleichung $R_n^{(k)}(z) = 0$ liegt je eine und nur je eine Wurzel der Gleichungen $R_{n+1}^{(k)}(z) = 0$ und $R_{n-1}^{(k+1)}(z) = 0$.

Es seien nun der Größe nach geordnet $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die n Wurzeln der Gleichung $G_n^{(k)}(z) = 0$, z_1 die absolut größte, z_n die absolut kleinste. Dann ist, da

sign $G_n^{(k)}(-\infty) = (-1)^n$ ist, für ein z im Intervall $z_1 \cdots z_2$ sign $(G_n^{(k)}(z)) = (-1)^{n-1}$, für ein z im Intervall $z_2 \cdots z_3$ sign $(G_n^{(k)}(z)) = (-1)^{n-2}$, also für ein z im Intervall $z_a \cdots z_{a-1}$ sign $(G_n^{(k)}(z)) = (-1)^{n-a}$. Entsprechend seien $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ die ebenso geordneten Wurzeln von $G_{n-1}^{(k)}(z) = 0$ und $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ die der Größe nach geordneten Wurzeln von $G_{n-1}^{(k+1)}(z) = 0$. x_a und y_a liegen zwischen z_a und z_{a-1}. Dann ist nach (9)

$$\varphi_{k+n}^{(k+1)}(-1)^{n-1}\varphi_{k+n-2}^{(k)}G_{n-1}^{(k)}(z) - z\varphi_{k+n-1}^{(k)}(-1)^{n-1}\varphi_{k+n-1}^{(k+1)}G_{n-1}^{(k+1)}(z) = \varphi_{k+n-1}^{(k+1)}(-1)^{n-2}\varphi_{k+n-1}^{(k)}G_n^{(k)}(z),$$

also für $z = x_a$, da $G_{n-1}^{(k)}(x_a) = 0$,

$$G_{n-1}^{(k+1)}(x_a) = \frac{1}{x_a}G_n^{(k)}(x_a)$$

$$\text{sign}\,(G_{n-1}^{(k+1)}(x_a)) = -\,\text{sign}\,(G_n^{(k)}(x_a)) = (-1)^{n-a-1}.$$

Ferner ist, da $z = z_{a+1}$ zwischen y_a und y_{a+1} liegt,

$$\text{sign}\,(G_{n-1}^{(k+1)}(z_{a+1})) = (-1)^{n-1-a}.$$

Es ist also

$$G_{n-1}^{(k+1)}(y_a) = 0, \quad \text{sign}\,(G_{n-1}^{(k+1)}(x_a)) = \text{sign}\,(G_{n-1}^{(k+1)}(z_{a+1})) = (-1)^{n-a-1}.$$

Da nun zwischen y_α oder x_a und z_{a-1} keine Wurzel von $G_{n-1}^{(k+1)}(z) = 0$ liegen kann, so muß x_a zwischen y_a und z_{a+1} liegen, weil sonst $G_{n-1}^{(k+1)}(x_a)$ und $G_{n-1}^{(k+1)}(z_{a+1})$ entgegengesetztes Vorzeichen hätten, was nach dem eben Bewiesenen nicht der Fall ist. Wir erhalten also den weiteren

Satz III: Von den zwischen den Wurzeln z_a und z_{a+1} der Gleichung $R_n^{(k)}(z) = 0$ gelegenen Wurzeln x_a und y_a der Gleichungen $R_{n-1}^{(k)}(z) = 0$ und $R_{n-1}^{(k+1)}(z) = 0$ ist stets

(27) $$y_a < x_a.$$

§ 2. Transformation der Determinante $R_n^{(k)}(z)$.

Es sei $(c_1, c_2, c_3, \ldots)$ irgendeine Zahlenfolge und C ein beliebiger Parameter. Aus den c_k leiten wir eine Folge von Differenzen $\Delta c_k(C)$ her, indem wir setzen

$$\Delta c_k(C) = Cc_k - c_{k+1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

ebenso aus den $\Delta c_k(C)$ eine neue Folge von Größen $\Delta^2 c_k(C)$, wobei

$$\Delta^2 c_k(C) = C\Delta c_k(C) - \Delta c_{k+1}(C), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Allgemein sei für ein beliebiges n

(28) $$\Delta^{n-1}c_k(C) = C\Delta^n c_k(C) - \Delta^n c_{k+1}(C), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \qquad n \geqq 1.$$

Man überzeugt sich leicht durch vollständige Induktion von der Richtigkeit der allgemeinen Formel

(29) $$\Delta^n c_k(C) = C^n c_k - \binom{n}{1}C^{n-1}c_{k+1} + \binom{n}{2}C^{n-2}c_{k+2} - + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}c_{k-n}.$$

Wir bilden nun aus dem recurrierenden System $c_1, -c_2, c_3, \ldots$ die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} c_1 & -c_2 & \cdots & (-1)^{n-1} c_n \\ -c_2 & c_3 & \cdots & (-1)^n c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{n-1} c_n & (-1)^n c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Addieren wir in D zu der n-ten, $(n-1)$-ten, ... Spalte die jeweils vorhergehende, nachdem wir sie mit C multipliziert haben, so geht sie über in

$$D = \begin{vmatrix} c_1 & \Delta c_1(C) & -\Delta c_2(C) & \cdots & (-1)^{n-2} \Delta c_{n-1}(C) \\ -c_2 & -\Delta c_2(C) & \Delta c_3(C) & \cdots & (-1)^{n-1} \Delta c_n(C) \\ c_3 & \Delta c_3(C) & -\Delta c_4(C) & \cdots & (-1)^n \Delta c_{n+1}(C) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{n-1} c_n & (-1)^{n-1} \Delta c_n(C) & (-1)^n \Delta c_{n+1}(C) & \cdots & -\Delta c_{2n-2}(C) \end{vmatrix}$$

Indem man diese Operation wiederholt mit den neuen Spalten vornimmt, erhält man schließlich

$$(30) \qquad D = \begin{vmatrix} c_1 & \Delta c_1(C) & \Delta^2 c_1(C) & \cdots & \Delta^{n-1} c_1(C) \\ -c_2 & -\Delta c_2(C) & -\Delta^2 c_2(C) & \cdots & -\Delta^{n-1} c_2(C) \\ c_3 & \Delta c_3(C) & \Delta^2 c_3(C) & \cdots & \Delta^{n-1} c_3(C) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{n-1} c_n & (-1)^{n-1} \Delta c_n(C) & (-1)^{n-1} \Delta^2 c_n(C) & \cdots & (-1)^{n-1} \Delta^{n-1} c_n(C) \end{vmatrix}$$

Nehmen wir nun die angegebenen, bisher auf die Spalten angewendeten Operationen auch mit den Zeilen der zuletzt erhaltenen Determinante vor, so ergibt sich die neue Determinantendarstellung

$$D = \begin{vmatrix} c_1 & \Delta c_1(C) & \cdots & \Delta^{n-1} c_1(C) \\ \Delta c_1(C) & \Delta^2 c_1(C) & \cdots & \Delta^n c_1(C) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta^{n-1} c_1(C) & \Delta^n c_1(C) & \cdots & \Delta^{2n-2} c_1(C) \end{vmatrix}.$$

Für $C = 1$ erhalten wir die bekannte von *Hankel* angegebene Transformation von D.

Wenden wir das eben geschilderte Verfahren auf die Zeilen und n letzten Spalten der Determinante

$$R_n(z) = \begin{vmatrix} 1 & c_1 & - & c_2 & \cdots & (-1)^{n-1} c_n \\ z & - c_2 & & c_3 & \cdots & (-1)^n c_{n+1} \\ z^2 & c_3 & - & c_4 & \cdots & (-1)^{n+1} c_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z^n & (-1)^n c_{n+1} & (-1)^{n+1} c_{n+2} & \cdots & & -c_{2n} \end{vmatrix}$$

an, so folgt

$$R_n(z) = \begin{vmatrix} 1 & c_1 & \Delta\, c_1(C) \cdots \Delta^{n-1}\, c_1(C) \\ (z+C)\ \Delta\, c_1(C) & \Delta^2 c_1(C) \cdots & \Delta^n\, c_1(C) \\ (z+C)^2 \Delta^2 c_1(C) & \Delta^3 c_1(C) \cdots \Delta^{n+1}\, c_1(C) & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ (z+C)^n \Delta^n c_1(C)\, \Delta^{n+1} c_1(C) \cdots \Delta^{2n-1} c_1(C) & & \end{vmatrix}.$$

Wir haben nämlich in (30) nur n durch $n+1$, die c_λ durch z_λ und die Elemente der ersten Spalte durch

$$C^r + \binom{r}{1} C^{r-1} z + \binom{r}{2} C^{r-2} z^2 + \cdots + z^r = (z+C)^r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots n$$

zu ersetzen. Setzen wir endlich $C = -z$, so geht $R_n(z)$ über in

$$R_n(z) = \begin{vmatrix} \Delta\, c_1(-z) & \Delta^2 c_1(-z) \cdots & \Delta^n c_1(-z) \\ \Delta^2 c_1(-z) & \Delta^3 c_1(-z) \cdots \Delta^{n-1}\, c_1(-z) & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \Delta^n c_1(-z) & \Delta^{n+1} c_1(-z) \cdots \Delta^{2n-1} c_1(-z) & \end{vmatrix}.$$

Wenden wir dieses Resultat auf die Determinante (7) für $R_n^{(k)}(z)$ an, so haben wir für die Elemente der transformierten Determinante nur zu setzen

$$(-z)^r (-1)^{k-1} c_k - \binom{r}{1} (-z)^{r-1} (-1)^{k-1} c_{k+1} + \cdots (-1)^r \binom{r}{r} (-1)^{k-1} c_{k+r},$$

was nach (29)

$$= (-1)^{k-1} \Delta^r c_k (-z)$$

ist. Es ist also

$$(31) \qquad R_n^{(k)}(z) = \begin{vmatrix} 1 & (-1)^{k-1} c_k & \cdots (-1)^{k+n-2} c_{k+n-1} \\ z & (-1)^k c_{k+1} \cdots & (-1)^{k+n-1} c_{k+n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ z^n & (-1)^{k+n-1} c_{k+n} \cdots & (-1)^k c_{k+2n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (-1)^{k-1} \Delta\, c_k(-z) & (-1)^{k-1} \Delta^2\ c_k(-z) \cdots (-1)^{k-1} \Delta^n\ c_k(-z) \\ (-1)^{k-1} \Delta^2 c_k(-z) & (-1)^{k-1} \Delta^3\ c_k(-z) \cdots (-1)^{k-1} \Delta^{n+1}\, c_k(-z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (-1)^{k-1} \Delta^n c_k(-z) & (-1)^{k-1} \Delta^{n+1} c_k(-z) \cdots (-1)^{k-1} \Delta^{2n-1} c_k(-z) \end{vmatrix}.$$

$R_n^k(z)$ ist jetzt in eine Determinante verwandelt, deren Elemente einem rekurrierenden System angehören. Die Hauptunterdeterminanten der zweiten Determinantendarstellung von $R_n^k(z)$ sind die Funktionen

$$R_{n-1}^{(k)}(z), \quad R_{n-2}^{(k)}(z), \ldots, R_1^{(k)}(z), \quad R_0^{(k)}(z) = 1.$$

Eine weitere Determinantendarstellung von $R_n^{(k)}(z)$ gewinnen wir auf folgende Weise. Durch Änderung der Reihenfolge der Spalten und Zeilen der ersten Determinante für $R_n^{(k)}(z)$ findet man leicht

$$R_n^{(k)}(z) = (-1)^n z^n \begin{vmatrix} 1 & (-1)^{k-1} c_{k+2n-1} & (-1)^k c_{k+2n-2} \cdots (-1)^{k+n-2} c_{k+n} \\ \frac{1}{z} & (-1)^k c_{k+2n-2} & (-1)^{k+1} c_{k+2n-3} \cdots (-1)^{k+n-1} c_{k+n-1} \\ \frac{1}{z^2} & (-1)^{k+1} c_{k+2n-3} & (-1)^{k+2} c_{k+2n-4} \cdots (-1)^{k+n} c_{k+n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{z^n} & (-1)^{k+n-1} c_{k+n-1} & (-1)^{k+1} c_{k+n-2} \cdots (-1)^k c_k \end{vmatrix}$$

Durch Anwendung der Transformation (31) erhält man dann unschwer

$$(32) \quad (-1)^n R_n^{(k)}(z) = \begin{vmatrix} (-1)^{k-1} \Delta c_{k+n-1} & (-1)^{k-1} \frac{\Delta^2 c_{k+n-1}}{z} \cdots (-1)^{k-1} \frac{\Delta^n c_{k+n-1}}{z^{n-1}} \\ (-1)^{k-1} \frac{\Delta^2 c_{k+n-1}}{z} & (-1)^{k-1} \frac{\Delta^3 c_{k+n-1}}{z^2} \cdots (-1)^{k-1} \frac{\Delta^{n+1} c_{k+n-1}}{z^n} \\ \cdots & \cdots \\ (-1)^{k-1} \frac{\Delta^n c_{k+n-1}}{z^{n-1}} & (-1)^{k-1} \frac{\Delta^{n+1} c_{k+n-1}}{z^n} \cdots (-1)^{k-1} \frac{\Delta^{2n-1} c_{k+n-1}}{z^{2n-2}} \end{vmatrix}.$$

Die Hauptunterdeterminanten dieser Determinante sind die Funktionen

$$(-1)^{n-1} R_{n-1}^{(k+1)}(z), \quad (-1)^{n-2} R_{n-2}^{(k+2)}(z), \ldots, (-1) R_1^{(k+n-1)}(z), \quad R_0^{(k+n)}(z) = 1.$$

§ 3. Beziehung zum Trägheitsgesetz der quadratischen Formen.

Der durch (31) eingeführten symmetrischen Determinante für $R_n^{(k)}(z)$ ordnen wir nun eine quadratische Form $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n; z)$ zu, indem wir jedes Element $a_r^{(s)}$ mit $x_r x_s$ multiplizieren und dann $\Sigma a_r^{(s)} x_s x_s$ bilden Wir erhalten so

$$(33) \quad \begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n; z) = &\sum_{r=1}^{n} (-1)^{k-1} (x_1 x_r + x_2 x_{r-1} + \cdots + x_r x_1) \Delta^r c_k(-z) \\ &+ \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{k-1} (x_{r+1} x_n + x_{r+2} x_{n-1} + \cdots + x_n x_{r+1}) \Delta^{n+r} c_k(-z). \end{aligned}$$

Die Funktionen

$$R_n^{(k)}(z), \quad R_{n-1}^{(k)}(z), \ldots R_1^{(k)}(z), \quad R_0^{(k)}(z) = 1$$

bilden dann eine Kette der Hauptunterdeterminanten der Determinante $R_n^{(k)}(z)$ der Form $\varphi(x_1, \ldots, x_n; z)$. Diese Kette hat der Rekursionsformel (12) zufolge die beiden Eigenschaften:

1. Für keinen reellen Wert von z können zwei aufeinanderfolgende Glieder der Kette verschwinden.
2. Wenn ein inneres Glied der Kette für einen Wert von z verschwindet, so haben die beiden benachbarten Glieder für diesen Wert von z entgegengesetztes Vorzeichen.

Es sei nun $z = \xi$ eine negative reelle Zahl, die keine Wurzel von $R_n^{(k)}(z) = 0$ ist. $\varphi(x_1, \ldots, x_n; \xi) = \varphi(\xi)$ lasse sich in eine Summe von π positiven und ν negativen Quadraten von linear unabhängigen linearen Funktionen der n Veränderlichen

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ transformieren. Dann ist nach einem Satz aus der Theorie der quadratischen Formen [1]) π gleich der Anzahl der Zeichenfolgen, ν gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Kette

$$R_n^{(k)}(\xi), \quad R_{n-1}^{(k)}(\xi), \ldots R_1^{(k)}(\xi), \quad R_0^{(k)}(\xi).$$

Nach (13) entspricht aber jeder Zeichenfolge in dieser Kette ein Zeichenwechsel in der Kette

$$G_n^{(k)}(\xi), \quad G_{n-1}^{(k)}(\xi), \ldots G_1^{(k)}(\xi), \quad G_0^{(k)}(\xi)$$

und umgekehrt jedem Zeichenwechsel eine Zeichenfolge. π ist also gleich der Anzahl der Zeichenwechsel dieser Kette. Da aber diese Kette für $\xi = 0$ lauter Zeichenfolgen aufweist, so gehen in dem Intervall $\xi \cdots 0$ π Zeichenwechsel verloren, d. h. nach dem *Sturm*schen Satz liegen in diesem Intervall π Wurzeln von $R_n^{(k)}(z) = 0$. Wir erhalten so den

Satz IV: Ist ξ keine Wurzel von $R_n^{(k)}(z) = 0$ und liegen in dem Intervall $\xi \cdots 0$ π reelle Wurzeln von $R_n^{(k)}(z) = 0$, so läßt sich $\varphi(\xi)$ in eine Summe von π positiven und $n - \pi$ negativen Quadraten von n linear unabhängigen linearen Funktionen transformieren.

Dabei kann ξ wohl eine Wurzel eines der auf $R_n^{(k)}(z)$ folgenden Glieder sein. Wir betrachten jetzt den Fall, daß ξ eine Wurzel von $R_n^{(k)}(z) = 0$ ist. Es ist also $R_n^{(k)}(\xi) = 0$, während $R_{n-1}^{(k)}(\xi) \neq 0$ ist. Wir können nun zwei Werte $\xi_1 < \xi < \xi_2$ annehmen, so daß im Intervall $\xi_1 \cdots \xi_2$ $G_n^{(k)}(z)$ nur an der Stelle $z = \xi$ verschwindet, während $G_{n-1}^{(k)}(z)$ für $z = \xi_1, \xi, \xi_2$ dasselbe Vorzeichen besitzt. Wir wollen noch ξ_1 und ξ_2 so wählen, daß in der Reihe $G_{n-2}^{(k)}(z), G_{n-3}^{(k)}(z), \ldots, G_1^{(k)}(z), G_0^{(k)}(z)$ kein Glied für $z = \xi_1$ oder $z = \xi_2$ verschwindet [2]). Dann müssen in der Reihe $G_{n-1}^{(k)}(z), \ldots,$ $G_1^{(k)}(z), G_0^{(k)}(z)$ für $z = \xi_1$ und $z = \xi_2$ gleich viel Vorzeichenwechsel auftreten. Nun tritt aber nach dem *Sturm*schen Satz in der Reihe $G_n^{(k)}(z), \ldots, G_0^{(k)}(z)$ für $z = \xi_1$ ein Vorzeichenwechsel mehr auf wie für $z = \xi_2$. Dieser kann daher nur zwischen $G_n^{(k)}(\xi_1)$ und $G_{n-1}^{(k)}(\xi_1)$ liegen. Nehmen wir also an, daß zwischen ξ_1 und 0 π Wurzeln von $G_n^{(k)}(z) = 0$ liegen, so treten in der Reihe $G_{n-1}^{(k)}(z), \cdots, G_0^{(k)}(z)$ für $z = \xi_1, \xi, \xi_2$ je $\pi - 1$ Zeichenwechsel auf, demnach $n - 1 - (\pi - 1) = n - \pi$ Zeichenfolgen. Nach dem oben Gesagten verschwindet demnach in der Kette der Hauptunterdeterminanten $R_n^{(k)}(z), \cdots, R_0^{(k)}(z)$ für $z = \xi$ das erste Glied, während in der Kette der darauf folgenden Glieder $\nu = n - \pi$ Zeichenwechsel vorkommen. Daher läßt sich $\varphi(\xi)$ als eine Summe von $\pi' = n - 1 - (n - \pi) = \pi - 1$ positiven Quadraten und von $\nu' = n - \pi$ negativen Quadraten von voneinander unabhängigen linearen Funktionen darstellen [3]). Wir erhalten so

Satz V: Ist ξ eine Wurzel von $R_n^{(k)}(z) = 0$ und liegen in dem Intervall $\xi \cdots 0$, ξ mit eingeschlossen, π Wurzeln von $R_n^{(k)}(z) = 0$, so läßt sich $\varphi(\xi)$ in eine

---

[1]) *H. Weber*, a. a. O. § 89.

[2]) Zwei aufeinanderfolgende Glieder können (14) zufolge für keinen Wert von z verschwinden.

[3]) *H. Weber*, a. a. O. § 89.

Summe von $\pi - 1$ positiven und $n - \pi$ negativen Quadraten von $n - 1$ linear unabhängigen linearen Funktionen transformieren.

Ist endlich ξ eine positive Zahl, so ergeben sich für $z = \xi$ in der Kette $G_n^{(k)}(z), \ldots, G_0^{(k)}(z)$ n Zeichenfolgen, demnach für die Kette der Unterdeterminanten n Zeichenwechsel, d. h. $\varphi(\xi)$ läßt sich als Summe von n negativen Quadraten darstellen. Also ist $\varphi(\xi)$ für positive ξ eine negative definite Form, während $\varphi(\xi)$ für jedes ξ, das kleiner ist als die kleinste Wurzel von $R_n^{(k)}(z) = 0$, eine positive definite Form ist.

Auswertung bestimmter Integrale.

Von *Guido Hoheisel* in Breslau.

Ein bekannter Satz der Funktionentheorie, der zur Berechnung bestimmter Integrale dient, lautet: Ist $Q(z)$ eine in der Halbebene $\Im(z) \geqq 0$ bis auf Pole reguläre Funktion, für welche außerdem in $\Im(z) \geqq 0$ $zQ(z) \rightarrow 0$ [1]) und die Integrale

$$\int_{-\infty}^{0} Q(x)\,dx \text{ und } \int_{0}^{\infty} Q(x)\,dx \quad (x \text{ reell})$$

existieren, dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx = 2\pi i \Sigma R,$$

wobei ΣR die Summe der wegen $zQ(z) \rightarrow 0$ nur endlich vielen Residuen von $Q(z)$ bedeutet [2]).

Jordan [3]) hat gezeigt, daß statt der Voraussetzung $zQ(z) \rightarrow 0$ ausreicht $Q(z) \rightarrow 0$.

Wir wollen zeigen, daß noch weit geringere Voraussetzungen ausreichen. Dabei soll, was natürlich keine Einschränkung bedeutet, $Q(z)$ in $\Im(z) \geqq 0$ überall regulär sein. Es gilt:

Ist $Q(z)$ eine in der Halbebene $\Im(z) \geqq 0$ reguläre Funktion, für welche die Integrale $\int_{-\infty}^{0} Q(x)\,dx$ und $\int_{0}^{\infty} Q(x)\,dx$ (x reell) existieren und für die in dieser Halbebene die Ungleichung

$$|Q(z)| < \text{const. } e^{|z|^k} \quad (k<1)$$

statthaft, dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx = 0.$$

Zum Beweise erinnern wir an zwei Sätze:

1. Satz von *Phragmen-Lindelöf* [4]): Ist $f(z)$ in $\Im(z) \geqq 0$ regulär, auf der reellen Achse beschränkt und für große $|z|$ $|f(z)| < \text{const. } e^{|z|^k} (k<1)$, dann ist $f(z)$ in der ganzen Halbebene beschränkt.

---

[1]) $\rightarrow$ bedeutet „gleichmäßig konvergiert gegen".

[2]) Die Nichtexistenz von reellen Polen folgt aus der Integrabilität von $Q(z)$.

[3]) Cours d'analyse II.

[4]) Acta mathem. Bd. 31.

2. Satz von *Lindelöf*[1]): Ist $f(z)$ in einem Winkelraum $\varphi_0 \leqq \arg z \leqq \varphi_1$ regulär und geht auf den beiden Randstrahlen $\arg z = \varphi_0$ und $\arg z = \varphi_1$ für $|z| = \infty$ gegen bestimmte Werte a_0 und a_1, so nimmt entweder $f(z)$ im Winkelraum jeden Wert bis auf höchstens einen an oder es gilt im ganzen Winkelraum $f(z) \to a = a_0 = a_1$.

Die in $\Im(z) \geqq 0$ analytische Funktion

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{0} Q(x)\,dx + \int_{0}^{z} Q(z)\,dz\,,$$

wobei der Kurvenweg im zweiten Integral geradlinig von 0 bis z führe, ist für reelle x beschränkt; insbesondere ist

$$\varphi(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to -\infty; \qquad \varphi(x) \to a = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx \quad \text{für} \quad x \to +\infty.$$

Ferner ist für große $|z|$

$$|\varphi(z)| < \text{const.} + |z| \cdot \text{const.}\, e^{|z|^k} < \text{const.}\, e^{|z|^{k'}} \qquad (k < k' < 1).$$

Also ist nach Satz 1 $\varphi(z)$ überhaupt beschränkt und daher nach Satz 2

$$\varphi(z) \to 0 = a$$

und die Behauptung erwiesen.

Anmerkung: Es genügt, daß die Ungleichung für $Q(z)$ nur für eine Folge von Halbkreisen mit unendlich wachsendem Radius und festem Zentrum (oder eine Folge von ins Unendliche wachsenden Kurven nicht zu großer Länge) erfüllt ist. Auch dann gilt nämlich Satz 1 und der Beweis bleibt unverändert.

---

[1]) Sc. Fenn. 1908.

Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 und Leipzig
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 59533

Neueste mathematische Erscheinungen

der

Sammlung Göschen

Jeder Band gebunden Rm. 1.50

Band 48: **Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra.** Von Dr. Hermann Schubert, weil. Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. 4. neubearbeitete und erweiterte Auflage von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. 1926. 139 Seiten. Mit 8 Figuren.

Band 930: **Elementare Algebra.** Von Prof. P. B. Fischer. 1926. 149 Seiten. Mit 20 Figuren.

Band 931: **Höhere Algebra.** Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor an der Universität Halle. I. Band: Lineare Gleichungen. 1926. 160 Seiten.

Band 920: **Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Dr. G. Hoheisel, Privatdozent in Breslau. 1926. 159 Seiten.

Band 180: **Versicherungsmathematik.** Von Dr. Friedrich Boehm, Professor an der Universität München. I. Band: Elemente der Versicherungsrechnung. 1925. 144 Seiten.

Band 917: —, II. Band: Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 1926. 171 Seiten.

Band 922: **Mathematische Instrumente.** Von Dr. Fr. A. Willers, Privatdozent an der Techn. Hochschule Charlottenburg. 1926. 144 Seiten. Mit 68 Figuren.

Vollständige Verzeichnisse sowie Sonderverzeichnisse über die einzelnen Gebiete stehen durch jede Buchhandlung oder direkt vom Verlage kostenlos zur Verfügung.

Walter de Gruyter & Co. **Berlin W 10 und Leipzig**
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 595 33

Neueste Erscheinung auf dem Gebiete der Mathematik

Einführung in die Axiomatik der Algebra

Von **Dr. H. Beck**
o. Prof. an der Universität Bonn

Oktav. X, 198 Seiten. Geheftet M. 9.—, gebunden M. 10.50

(Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine Mathematik Band 6.)

Das vorliegende Buch enthält im wesentlichen den Stoff einer an der Bonner Universität gehaltenen vierstündigen Anfängervorlesung; es erschöpft sich nicht in axiomatischen Dingen, sondern bringt darüber hinaus eine Reihe anderer Gebiete, die der Studierende braucht.

In Göschens Lehrbücherei sind bisher folgende Bände erschienen:

Band 1:

Irrationalzahlen von Dr. O. Perron, Professor an der Universität Heidelberg. 8°. IV und 186 Seiten. 1921. Preis broschiert M. 6.—, gebunden M. 7.—

Band 2:

Praxis der Gleichungen von Dr. C. Runge, Professor an der Universität Göttingen. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 8°. IV und 170 Seiten. 1921. Preis broschiert M. 6.—, gebunden M. 7.—

Band 3:

Grundlehren der neueren Zahlentheorie von Prof. Dr. Paul Bachmann. Mit 10 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 8°. XIV und 246 Seiten. 1921. Preis broschiert M. 8.50, gebunden M. 9.50

Band 4:

Synthetische Zahlentheorie von Dr. Rudolf Fueter, Professor an der Universität Zürich. Zweite vermehrte Auflage. 8°. VIII und 277 Seiten. 1925. Preis broschiert M. 10.—, gebunden M. 12.—

Band 5:

Automorphe Funktionen von Dr. Ludw. Schlesinger, Professor an der Universität Gießen. 8°. X u. 205 Seiten. 1924. Preis broschiert M. 8.—, gebd. M. 9.20

Weitere Bände befinden sich in Vorbereitung.

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schaefer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 156.

Heft 2.

Ausgegeben den 28. Januar

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG · J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG · GEORG REIMER · KARL J. TRÜBNER · VEIT & COMP.

1927

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 156. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

Stein, Anna, Die Gewinnung der Einheiten in gewissen relativ-quadratischen Zahlkörpern durch das J. Hurwitzsche Kettenbruchverfahren . . . . Seite 69

Maier. W., Potenzreihen irrationalen Grenzwertes . . . . . — 93

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Die Gewinnung der Einheiten in gewissen relativ-quadratischen Zahlkörpern durch das J. Hurwitzsche Kettenbruchverfahren.

Von *Anna Stein* aus Hamburg [1]).

Mit 8 Figuren.

Inhalt.

Einleitung 69
§ 1. Formales über Kettenbrüche 70
§ 2. Relativ-quadratische Körper $K = k(\sqrt{d})$ 73
§ 3. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Reduziertheit einer relativ-quadratischen Irrationalität α_1 76
§ 4. Die Kettenbruchentwicklung 1. Art der normierten Basiszahl ω_0 80
§ 5. Notwendige Bedingungen dafür, daß eine Einheit ε durch die Kettenbruchentwicklung 1. Art von ω_0 geliefert wird 82
§ 6. Hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Einheit ε durch die Kettenbruchentwicklung 1. Art von ω_0 geliefert wird 86
§ 7. Der Abelsche Fall 90

Einleitung.

J. Hurwitz hat in seiner Arbeit: „*Über die Reduktion der binären quadratischen Formen mit komplexen Koeffizienten und Variablen*“ [2]) eine Kettenbruchtheorie für den Körper $k = R(i)$ der „rationalen komplexen Zahlen“ entwickelt. Das Ziel dieser Arbeit ist, die Bemerkung am Schluß von H. zu einem systematischen Verfahren auszugestalten, das gestattet, für jeden relativ-quadratischen Körper $K = k(\sqrt{d})$ über k eine Grundeinheit ε_1 oder wenigstens eine möglichst niedrige Potenz einer solchen durch die *J. Hurwitz*sche Kettenbruchentwicklung einer geeigneten Zahl ω_0 aus K zu berechnen. Es gelingt in der Tat, ausgehend von einer bestimmten (bei Vorgabe von d unmittelbar angebbaren) ganzen Zahl ω_0 aus K, in allen Fällen eine Grundeinheit ε_{1+i} des Ringes K_{1+i} aller mod. $(1+i)$ einer

[1]) Die Anregung zu dieser Arbeit sowie wichtige Hinweise für die Durchführung verdanke ich einer Reihe von Besprechungen mit Herrn *H. Hasse*.

[2]) Acta math. 25 (1902), im folgenden zitiert mit H. Ich setze die Resultate dieser Arbeit als bekannt voraus und begnüge mich jeweils mit kurzem Hinweis auf die betr. Stelle von H.

Zahl aus k kongruenten ganzen Zahlen von K zu berechnen, und für eine bestimmte Klasse von Körpern K sogar eine Grundeinheit ε_1 von K selbst. Formal verläuft diese Berechnung ganz analog, wie in dem bekannten Falle eines reell-quadratischen Zahlkörpers $K = k(\sqrt{d})$ über dem rationalen Körper $k = R$ mittels des gewöhnlichen Kettenbruchverfahrens [1]).

§ 1. Formales über Kettenbrüche.

Unter einer Kettenbruchentwicklung der Größe a_1 wird ein Formelsystem der Art

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1 = a_1 - \dfrac{1}{a_2}, \ \ldots, \ a_\nu = a_\nu - \dfrac{1}{a_{\nu+1}} \\ \text{kurz} \quad a_1 = [a_1, \ \ldots, \ a_\nu; \ a_{\nu+1}] \end{cases}$$

verstanden. Um den dabei vorliegenden Zusammenhang zwischen den *Teilnennern* a_ν und *Resten* a_ν übersichtlich darzustellen, bedient man sich zweckmäßig des Matrizenkalküls. Es werde

$$(2) \qquad A_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_\nu \end{pmatrix}$$

gesetzt und die Näherungszahlen p_ν, q_ν in der Matrizendarstellung

$$(3) \qquad P_\nu = \begin{pmatrix} p_{\nu-1} & p_\nu \\ q_{\nu-1} & q_\nu \end{pmatrix}$$

durch die (in sich widerspruchsfreien!) Rekursionsformeln

$$(4) \qquad P_\nu = P_{\nu-1} A_\nu \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{ausführlich} \begin{cases} p_\nu = a_\nu p_{\nu-1} - p_{\nu-2} \\ q_\nu = a_\nu q_{\nu-1} - q_{\nu-2} \end{cases}\right), \quad \text{also in expliziter Darstellung}$$

$$(5) \qquad P_\nu = P_0 A_1 \ldots A_\nu,$$

eingeführt, die die Determinantenrelation

$$(6) \qquad |P_\nu| = 1$$

ohne weiteres erkennen lassen. Da sich die Formeln (1) als linear-gebrochene Substitutionen

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ a_\nu \end{pmatrix} \sim A_\nu \begin{pmatrix} -1 \\ a_{\nu+1} \end{pmatrix} \quad [2])$$

schreiben lassen, hängen die Reste a_ν mit a_1 durch die linear-gebrochenen Substitutionen

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \end{pmatrix} \sim A_1 \cdots A_\nu \begin{pmatrix} -1 \\ a_{\nu+1} \end{pmatrix} = P_0^{-1} P_\nu \begin{pmatrix} -1 \\ a_{\nu+1} \end{pmatrix}$$

---

[1]) Siehe etwa *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra I, elfter Abschnitt.

[2]) Das Zeichen $\sim$ soll die Gleichheit der Quotienten aus den beiden Elementen der beiderseitigen Matrizen bedeuten, oder also auch die Proportionalität der beiderseitigen Matrizen.

$\left(\text{ausführlich } a_1 = \dfrac{p_\nu a_{\nu+1} - p_{\nu-1}}{q_\nu a_{\nu+1} - q_{\nu-1}}\right)$ zusammen, die sich unter Einführung der Proportionalitätsfaktoren

$$\varepsilon_\nu = q_\nu a_{\nu+1} - q_{\nu-1} \tag{9}$$

auch als lineare homogene Substitutionen

$$\varepsilon_\nu \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \end{pmatrix} = A_1 \dots A_\nu \begin{pmatrix} -1 \\ a_{\nu+1} \end{pmatrix} = P_0^{-1} P_\nu \begin{pmatrix} -1 \\ a_{\nu+1} \end{pmatrix} \tag{10}$$

darstellen lassen.

Wir verstehen im folgenden unter (1) die *J. Hurwitz*sche Kettenbruchentwicklung 1. Art einer komplexen Zahl a_1. Dabei sind die Teilnenner a_ν als ganze Zahlen des Körpers $k = R(i)$ durch a_1 in gewisser Weise [1]) *eindeutig* bestimmt.

Unter den Bestimmungsregeln für die a_ν heben wir die Kongruenzbedingung

$$a_\nu \equiv 0 \bmod. (1+i) \tag{11}$$

hervor. Da es in k nur die beiden Restklassen 0, 1 mod. $(1+i)$ gibt, können wir für diese Restklassen die kurzen Bezeichnungen *gerade*, *ungerade* verwenden. Aus (2), (4) folgt, daß die Matrizen P_ν den Kongruenzen

$$P_\nu \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bmod. (1+i) \tag{12}$$

genügen [2]), also der durch die Reste $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mod. $(1+i)$ repräsentierten Kongruenzuntergruppe [3]) der Modulgruppe in k angehören.

Dann und nur dann, wenn a_1 zu k gehört, bricht die in dieser Weise vorgenommene Entwicklung (1) nach endlich vielen Schritten ab [4]), und dann und nur dann, wenn a_1 eine quadratische Irrationalität über k ist, ist sie periodisch [5]). In dem letzteren, uns hier allein interessierenden Fall haben wir eine feinere Einteilung der Teilnennerfolge, als die den vollen Perioden entsprechende, zugrundezulegen. Es sei

$$a_1 = [a_1, \dots, a_\varkappa; \overline{a_{\varkappa+1}, \dots, a_{\varkappa+\nu_1}}; a_{\varkappa+1}]$$

ein periodischer Kettenbruch 1. Art mit der *kleinsten Vorperiode* $a_1, \dots, a_\varkappa$ und der *primitiven Periode* $a_{\varkappa+1}, \dots, a_{\varkappa+\nu_1}$, d. h. $a_{\varkappa+1}$ der erste Rest, der einem späteren $a_{\varkappa+\nu+1}$ gleich wird und $a_{\varkappa+\nu_1+1}$ der erste solche spätere Rest. Dann gibt es auch einen ersten späteren Rest $a_{\varkappa+n_1+1}$, der zu $a_{\varkappa+1}$ assoziiert ist, so daß also

$$a_{\varkappa+n_1+1} = i^{m_1} a_{\varkappa+1}$$

ist. Wir nennen $a_{\varkappa+1}, \dots, a_{\varkappa+n_1}$ die *primitive Teilperiode und* i^{m_1} *ihren Faktor.*

---

[1]) H. I, § 1.
[2]) Die Kongruenzwerte 0 in (12) gelten sogar mod. 2.
[3]) H. II, § 1.
[4]) H. I, § 5.
[5]) H. I, § 8.

Allgemein reden wir von einer bei $a_{\varkappa+1}$ beginnenden *n-gliedrigen Teilperiode vom Faktor* i^m, wenn

$$a_{\varkappa+n+1} = i^m\, a_{\varkappa+1}$$

ist. Es wird dann [1]), wieder als Kettenbruch 1. Art,

$$(13)\qquad a_1 = [a_1, \ldots, a_\varkappa;\ \overline{a_{\varkappa+1}, \ldots, a_{\varkappa+n}};\ i^m a_{\varkappa+1}, (-i)^m a_{\varkappa+2}, \ldots, ((-1)^{\lambda-1} i)^m a_{\varkappa+\lambda};\ ((-1)^\lambda i)^m a_{\varkappa+\lambda+1}].$$

Für $\lambda = (l-1)n$ folgt hieraus

$$a_{\varkappa+ln+1} = ((-1)^{(l-1)n} i)^m\, a_{\varkappa+(l-1)n+1},$$

und somit durch Rekursion

$$a_{\varkappa+ln+1} = \left((-1)^{\frac{l(l-1)}{2}n} i^l\right)^m a_{\varkappa+1}.$$

Beginnt also bei $a_{\varkappa+1}$ eine n-gliedrige Teilperiode vom Faktor i^m, so beginnen dort auch ln-gliedrige Teilperioden für jedes Vielfache ln von n mit den Faktoren

$$(14)\qquad \left((-1)^{\frac{l(l-1)}{2}n} i^l\right)^m = \left\{\begin{array}{ll} i^{lm} & \text{für gerades } n \\ i^{l^2 m} & \text{für ungerades } n \end{array}\right\}.$$

Da ferner nach (13) alle auf die primitive Teilperiode folgenden Reste zu je einem der n_1 Reste $a_{\varkappa+1}, \ldots, a_{\varkappa+n_1}$ assoziiert sind, können keine anderen als die ln_1-gliedrigen Teilperioden bei $a_{\varkappa+1}$ beginnen. Insbesondere ist also die Länge ν_1 der primitiven Vollperiode ein Vielfaches von n_1 (und zwar kommt nach (14) für gerades n_1 nur $\nu_1 = n_1, 2n_1, 4n_1$, für ungerades n_1 nur $\nu_1 = n_1, 2n_1$ in Frage), und es kann auch bei keinem a_λ der kleinsten Vorperiode eine Teilperiode beginnen, weil sonst dort auch eine Vollperiode begänne.

Beginnt bei $a_{\varkappa+1}$ eine n-gliedrige Teilperiode vom Faktor i^m, so hat man nach (13) für die durch (2) definierten Matrizen $A_{\varkappa+n+\lambda}$ hinter dieser Teilperiode:

$$A_{\varkappa+n+\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & ((-1)^{\lambda-1} i)^m a_{\varkappa+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ((-1)^{\lambda-1} i)^m \end{pmatrix} A_{\varkappa+\lambda} \begin{pmatrix} ((-1)^\lambda i)^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und daraus für gerades μ:

$$(15)\qquad A_{\varkappa+n+1} \cdots A_{\varkappa+n+\mu}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix} A_{\varkappa+1} \begin{pmatrix} (-i)^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-i)^m \end{pmatrix} A_{\varkappa+2} \begin{pmatrix} i^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix} A_{\varkappa+3} \begin{pmatrix} (-i)^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-i)^m \end{pmatrix} A_{\varkappa+\mu} \begin{pmatrix} i^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix} A_{\varkappa+1} \cdots A_{\varkappa+\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-i)^m \end{pmatrix},$$

weil sich die „Zwischenfaktoren" je zu Diagonalmatrizen $\begin{pmatrix} (-i)^m & 0 \\ 0 & (-i)^m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i^m & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix}$ zusammenfassen und dann mit allen Faktoren vertauschen, also ans Ende ziehen lassen; für ungerades μ hat man ähnlich:

---

[1]) H. I, § 2.

$$(16)\quad A_{\varkappa+n+1}\cdots A_{\varkappa+n+\mu}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i^m\end{pmatrix} A_{\varkappa+1} \begin{pmatrix}(-i)^m & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-i)^m\end{pmatrix} A_{\varkappa+2} \begin{pmatrix}i^m & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i^m\end{pmatrix} A_{\varkappa+\mu} \begin{pmatrix}(-i)^m & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i^m\end{pmatrix} A_{\varkappa+1}\cdots A_{\varkappa+\mu} \begin{pmatrix}(-i)^m & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

§ 2. Relativ-quadratische Körper $K = k(\sqrt{d})$.

Es sei K ein relativ-quadratischer Körper über $k = R(i)$. Dann gibt es eine bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmte ganze, quadratfreie Zahl $d \neq 0, 1$ aus k, so daß $K = k(\sqrt{d})$ ist. Wir denken uns d durch die Vorschrift $-\frac{\pi}{2} < \text{ampl. } d \leqq +\frac{\pi}{2}$ eindeutig normiert. Unter den beiden, konjugiert-komplexen d, $\bar{d}$ entsprechenden, konjugiert-komplexen Körpern $K = k(\sqrt{d})$, $\overline{K} = k(\sqrt{\bar{d}})$, von denen wir ja für unseren Zweck nur einen zu betrachten brauchen, legen wir ferner einen bestimmten K durch die Forderung

$$0 \leqq \text{ampl. } d \leqq +\frac{\pi}{2}$$

fest, den wir dann *normiert* nennen. Schließlich schreiben wir zur eindeutigen Festlegung der $\sqrt{d}$ noch

$$(17)\qquad 0 \leqq \text{ampl.}\sqrt{d} \leqq +\frac{\pi}{4}$$

vor und nennen die so durch den normierten Körper K eindeutig bestimmte ganze Zahl $\sqrt{d}$ aus K die *normierte Erzeugende* von K.

Bekanntlich gibt es stets eine *Relativbasis* $1, \omega$ für K bezüglich k, durch die alle und nur die ganzen Zahlen a aus K in der Form $a = a + b\omega$ eindeutig dargestellt werden, wenn a und b alle ganzen Zahlen aus k durchlaufen. Eine besonders einfache solche Relativbasis erhält man mit [1])

$$(18)\quad \begin{cases} \text{a)} & \omega_0 = \sqrt{d} & \text{für } d \not\equiv 1 \bmod 2 \\ \text{b)} & \omega_0 = \dfrac{1+\sqrt{d}}{1+i} & \text{für } d \equiv 1 \bmod 2,\ d \not\equiv \pm 1 \bmod 4 \\ \text{c)} & \omega_0 = \dfrac{1+\sqrt{d}}{2} & \text{für } d \equiv 1 \bmod 4 \\ \text{d)} & \omega_0 = \dfrac{i+\sqrt{d}}{2} & \text{für } d \equiv -1 \bmod 4 \quad [2]), \end{cases}$$

---

[1]) Siehe etwa *J. Sommer*, Vorlesungen über Zahlentheorie (1907), V. 49.

[2]) Diese vier Fälle lassen sich durch die Teilbarkeit der Relativdifferente $\mathfrak{d}$ von K bezüglich k auch folgendermaßen charakterisieren: a) $\mathfrak{d} \equiv 0 \bmod (1+i)^2$, b) $\mathfrak{d} \equiv 0 \bmod (1+i)$, $\not\equiv 0 \bmod (1+i)^2$, c), d) $\mathfrak{d} \not\equiv 0 \bmod (1+i)$, sind also bis auf die Unterscheidung von c) und d) dem *Körper* K eigentümlich, während die letztere Unterscheidung erst durch unsere Normierungsfestsetzungen Sinn bekommt, da ja c) und d) durch Übergang von d zu $-d$ ineinander überführbar sind, ohne K zu ändern.

wo $\sqrt{d}$ die normierte Erzeugende von K ist. Wir nennen dies ω_0 die *normierte Basiszahl* von K.

Ist α eine Zahl aus K, so bezeichnen wir mit α' die *relativ-konjugierte* bezüglich k, mit $\overline{\alpha}$ die *konjugiert-komplexe*, so daß $|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$. Ferner bezeichnen wir mit

$n(\alpha)$ die *Relativnorm* $\alpha\,\alpha'$ von α bezüglich k

$s(\alpha)$ die *Relativspur* $\alpha + \alpha'$ von α bezüglich k.

Das *Zerlegungsgesetz* für das Hauptprimideal $\mathfrak{l} = (1+i)$ von k in Primideale von K läßt sich durch Relativnorm und Relativspur der normierten (oder irgendeiner) Basiszahl ω_0 von K folgendermaßen aussprechen [1]):

$$(19)\quad \begin{cases} \alpha) & \mathfrak{l} = \mathfrak{L}^2,\ n(\mathfrak{L}) = \mathfrak{l}, \text{ wenn } s(\omega_0) \text{ gerade} \\ \beta) & \mathfrak{l} = \mathfrak{L}\,\mathfrak{L}',\ \mathfrak{L} \neq \mathfrak{L}',\ n(\mathfrak{L}) = n(\mathfrak{L}') = \mathfrak{l}, \\ & \quad \text{wenn } s(\omega_0) \text{ ungerade, } n(\omega_0) \text{ gerade} \\ \gamma) & \mathfrak{l} = \mathfrak{L},\ n(\mathfrak{L}) = \mathfrak{l}^2, \\ & \quad \text{wenn } s(\omega_0) \text{ ungerade, } n(\omega_0) \text{ ungerade} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(Fälle (18) a), b))} \\ \\ \text{(Fälle (18) c), d)).} \end{matrix}$$

Nach dem allgemeinen Satz von *Dirichlet* ist die Anzahl der unabhängigen *Grundeinheiten* von K gleich 1 [2]). Jede Einheit ε aus K gestattet also eine eindeutige Darstellung der Form

$$(20)\qquad \varepsilon = \zeta_1\,\varepsilon_1^n,$$

wo ζ_1 eine Einheitswurzel aus K und ε_1 eine festgewählte Grundeinheit von K ist. An Stelle von ε_1 darf auch jede Einheit $\zeta_1\,\varepsilon_1^{\pm 1}$ gesetzt werden. Man kann also insbesondere $|\varepsilon_1| > 1$ voraussetzen. Nennen wir Einheiten, die sich nur um Einheitswurzelfaktoren unterscheiden, *adjungiert*, so ist ε_1 durch die Forderung $|\varepsilon_1| > 1$ bis auf adjungierte festgelegt. Durch eine einfache Überlegung aus der Theorie der Kreisteilungskörper ergibt sich, daß nur die folgenden beiden Körper K außer den schon in k enthaltenen 4-ten Einheitswurzeln i^m weitere Einheitswurzeln enthalten (also selbst Kreisteilungskörper sind!):

$$(21)\quad \begin{cases} k(\sqrt{i}) \text{ alle und nur die 8-ten Einheitswurzeln } \iota^m = (\sqrt{i})^m \\ k(\sqrt{3}) \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \text{ 12-ten} \quad ,, \quad \varrho^m = \left(\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}\right)^m. \end{cases}$$

Abgesehen von diesen beiden Körpern, die überhaupt im folgenden eine gewisse Ausnahmestellung einnehmen, decken sich also die Begriffe: adjungiert und assoziiert.

Für eine Einheit ε aus K ist $n(\varepsilon) = i^m$ eine Einheit aus k. Im Körper $k(\sqrt{i})$ kann wegen $n(\iota) = -i$ durch Übergang von ε zu assoziierten $n(\varepsilon)$ einer beliebi-

---

[1]) α) ist nach der vorgehenden Anmerkung klar, β) und γ) folgen — ebenfalls unter Berücksichtigung der vorigen Anmerkung — genau so, wie beim gewöhnlichen quadratischen Zahlkörper.

[2]) Wir brauchen übrigens diesen Satz für das Folgende nicht vorauszusetzen; vielmehr enthalten unsere späteren Resultate (Sätze 4, 5, 7) ersichtlich auch den Beweis des *Dirichlet*schen Satzes für unsere Körper K. (Vergl. jedoch S. 89, Anm.).

gen Einheit i^m aus k gleich gemacht werden. Abgesehen von diesem Körper ändert sich wegen $n(i) = -1$, $n(\varrho) = -1$ durch Übergang von ε zu assoziierten höchstens das Vorzeichen von $n(\varepsilon)$, das so auch beliebig beeinflußt werden kann. Entweder ist dann also für jede Einheit ε aus K, insbesondere auch für die Grundeinheiten, $n(\varepsilon) = \pm 1$, oder aber es gibt Einheiten ε in K, darunter auch die Grundeinheiten, für die $n(\varepsilon) = \pm i$ ist. Mittels des 1. Ergänzungssatzes zum quadratischen Reziprozitätsgesetz in $k\left(\left(\frac{i}{\mathfrak{p}}\right) = i^{\frac{N(\mathfrak{p})-1}{2}}\right)$ erkennt man übrigens als notwendige Bedingung für das Auftreten von $n(\varepsilon) = \pm i$ in Körpern $K \neq k(\sqrt{i})$ leicht [1]), daß d keinen ungeraden Primfaktor 1. Grades $\mathfrak{p}$ mit $N(\mathfrak{p}) \equiv 5 \bmod 8$ enthält.

Neben der Gruppe E_1 der Einheiten aus K (d. h. aus dem Ring K_1 aller ganzen Zahlen von K) haben wir auch die Gruppe E_{1+i} der Einheiten aus dem Ring K_{1+i} aller mod. $(1+i)$ einer Zahl aus k kongruenten ganzen Zahlen von K [2]) zu betrachten. E_{1+i} ist bekanntlich eine Untergruppe von E_1 von einem endlichen Index e und besitzt daher analog zu (20) eine eindeutige Basisdarstellung

$$\varepsilon = \zeta_{1+i}^{m}\ \varepsilon_{1+i}^{n} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{1+i} = \zeta_1\ \varepsilon_1^{e_1}, \tag{22}$$

wo ζ_{1+i} eine Einheitswurzel aus K_{1+i} und ε_{1+i} eine festgewählte Grundeinheit von K_{1+i} ist. Für ζ_{1+i} kommen sicher die schon in k, also in K_{1+i} enthaltenen 4-ten Einheitswurzeln i^m in Frage. Wird ferner auch die Grundeinheit ε_{1+i} von K_{1+i} durch die Forderung $|\varepsilon_{1+i}| > 1$ bis auf innerhalb K_{1+i} adjungierte eindeutig festgelegt, so ist e_1 der kleinste positive Exponent, für den $\varepsilon_1^{e_1}$ zu einer Einheit aus K_{1+i} adjungiert ist.

Sind nun e_K und e_k die Ordnungen der Gruppen derjenigen primen Restklassen nach $\mathfrak{l} = (1+i)$ in K bezw. k, die durch Einheiten aus K repräsentiert werden, so ist $e = \dfrac{e_K}{e_k}$. Da $e_k = 1$ als Teiler von $\Phi_k(\mathfrak{l}) = 1$ ist, ist $e = e_K$ Teiler von $\Phi_K(\mathfrak{l})$. Da ferner in den drei Fällen (19) α), β, γ)

$$\begin{cases} \alpha) & \Phi_K(\mathfrak{l}) = \Phi_K(\mathfrak{L}^2) = N_K(\mathfrak{L})^2 \left(1 - \dfrac{1}{N_K(\mathfrak{L})}\right) = 2^2 (1 - \tfrac{1}{2}) = 2 \\ \beta) & \Phi_K(\mathfrak{l}) = \Phi_K(\mathfrak{L})\Phi_K(\mathfrak{L}') = N_K(\mathfrak{L}) N_K(\mathfrak{L}') \left(1 - \dfrac{1}{N_K(\mathfrak{L})}\right)\left(1 - \dfrac{1}{N_K(\mathfrak{L}')}\right) \\ & \qquad = 2 \cdot 2 (1 - \tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{2}) = 1 \\ \gamma) & \Phi_K(\mathfrak{l}) = \Phi_K(\mathfrak{L}) = N_K(\mathfrak{L}) \left(1 - \dfrac{1}{N_K(\mathfrak{L})}\right) = 2^2 \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right) = 3 \end{cases} \tag{23}$$

ist [3]), ergibt sich

---

[1]) Analog zu *J. Sommer*, l. c. S. 113.

[2]) $\alpha = a + b\omega_0$ gehört also dann und nur dann zu K_{1+i}, wenn b gerade ist.

[3]) Es ist $N_K(\mathfrak{L}) = N_k(n(\mathfrak{L}))$ und $n(\mathfrak{L})$ durch (19) gegeben, $N_k(\mathfrak{l}) = 2$.

$$(24)\qquad \begin{cases} \alpha) & e = 1 \text{ oder } 2, & \text{wenn } \mathfrak{l} = \mathfrak{L}^2 \\ \beta) & e = 1 \quad\quad\;\; , & \text{wenn } \mathfrak{l} = \mathfrak{L}\mathfrak{L}' \\ \gamma) & e = 1 \text{ oder } 3, & \text{wenn } \mathfrak{l} = \mathfrak{L}. \end{cases}$$

Da nun für die beiden Kreisteilungskörper (21) die Fälle (24) α) bezw. γ) vorliegen und die Einheitswurzeln ι bezw. ϱ (weil sie gleich der normierten Basiszahl ω_0 sind) nicht zu K_{1+i} gehören, ist hier $e = 2$ bezw. $e = 3$. Dann muß aber, damit kein höherer Index als e von E_{1+i} in E_1 resultiert, $e_1 = 1$ sein, und (22) nimmt die Gestalt an:

$$(25)\qquad \varepsilon = i^m \varepsilon_{1+i}^n \text{ mit } \varepsilon_{1+i} = \begin{cases} \iota^m \varepsilon_1 \\ \varrho^m \varepsilon_1 \end{cases}.$$

Für die übrigen Körper kommen für ζ_{1+i} wie schon für ζ_1 nur die 4-ten Einheitswurzeln i^m aus k in Frage. Daher muß, damit kein niedrigerer Index als e von E_{1+i} in E_1 resultiert, $e_1 = e$ sein, und (22) nimmt die Gestalt an:

$$(26)\qquad \varepsilon = i^m \varepsilon_{1+i}^n \text{ mit } \varepsilon_{1+i} = i^l \varepsilon_1^e.$$

Das im folgenden auseinanderzusetzende Verfahren liefert infolge der Kongruenzbedingung (11) für die Teilnenner a_ν der Kettenbruchentwicklung 1. Art in gewissen Fällen nur eine Grundeinheit ε_{1+i} von K_{1+i}. Die Relationen (25), (26) zeigen dann, in welchem Zusammenhang diese mit einer Grundeinheit ε_1 von K_1 steht. Welche der beiden Möglichkeiten für e in den Fällen (24) α) und γ) jeweils vorliegt, läßt sich allerdings nicht durch ein allgemeines Gesetz entscheiden.

Will man ein $\varepsilon_1 = p + q\omega_0$ aus einem bereits bekannten $\varepsilon_{1+i} = a + b\omega_0$ berechnen, so hat man nur alle Teiler q von b zu bestimmen und für jeden solchen die vier quadratischen Gleichungen $n(\varepsilon_1) = p^2 + pqs(\omega_0) + q^2 n(\omega_0) = i^m$ auf ihre Lösbarkeit durch ein ganzes p aus k zu prüfen. Denn nach (26) muß ε_{1+i} — von den beiden Körpern (21), für die ja ε_1 aus ε_{1+i} gemäß (25) unmittelbar zu berechnen ist, abgesehen — zum Ring K_q gehören, d. h. q ein Teiler der (sicher von Null verschiedenen) Zahl b sein.

§ 3. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Reduziertheit einer relativ-quadratischen Irrationalität α_1.

Es ist für unseren Zweck wichtig, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zu kennen, daß eine quadratische Irrationalität α_1 über k *reduziert* [1]) ist, d. h. eine *rein-periodische* Kettenbruchentwicklung 1. Art hat. Wir bedienen uns bei der Aussprache dieser Bedingungen der folgenden Bezeichnungen [2]):

$\mathfrak{R}$: das Gebiet, das durch Spiegelung des quadratischen Gebietes mit den Ecken $\pm 1, \pm i$ am Einheitskreis entsteht, mit Einschluß der vier Randkreisbögen, aber ohne die vier Ecken $\pm 1, \pm i$ (wie in H. I, § 3),

---

[1]) H. II., § 2, S. 268.

[2]) Siehe dazu die Fig. I und II am Schlusse von H.

$\mathfrak{R}'$: das Äußere des Einheitskreises, mit Ausschluß des Randes (wie in H. I, § 9),

$\mathfrak{K}_a$: das der Kettenbruchentwicklung 2. Art zugrundeliegende unvollständige Kreisgebiet um a (wie in H. I, §§ 6, 9),

$\underline{\mathfrak{K}}_a$ bezw. $\overline{\mathfrak{K}}_a$: das Innere des Einheitskreises um a, mit Ausschluß bezw. mit Einschluß des Randes (speziell $\underline{\mathfrak{K}}_0 = \mathfrak{K}_0$).

Satz 1. *Damit eine quadratische Irrationalität a_1 über k reduziert ist, ist notwendig, daß*

(27) $$a_1 \text{ in } \mathfrak{R} \text{ liegt},$$

(28) $$a_1' \text{ in } \underline{\mathfrak{K}}_0 \text{ liegt},$$

(29)
$$\begin{cases} \text{falls } a_1 \text{ vom Typus } 1)\ (1+i) \text{ ist, } a_1' \text{ nicht in } \underline{\mathfrak{K}}_{1+i} \text{ liegt}, \\ \text{,, ,, ,, ,, } (2) \text{ ,, , ,, ,, ,, } \underline{\mathfrak{K}}_{1+i} \text{ ,, ,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Beweis: Es sei a_1 reduziert, also seine Kettenbruchentwicklung 1. Art von der Form:

$$a_1 = [a_1, \dots, a_n;\ a_1].$$

Dann besteht die Kettenbruchentwicklung 2. Art [2])

$$\frac{1}{a_1'} = \left\{ a_n, \dots, a_1; \frac{1}{a_1'} \right\}.$$

Zunächst liegen nun a_1 bezw. $\frac{1}{a_1'}$ als Reste einer Kettenbruchentwicklung 1. bezw. 2. Art in $\mathfrak{R}$ bezw. $\mathfrak{R}'$ [3]), was die Bedingungen (27) und (28) ergibt. Ferner sind auch die weiteren Reste $a_2, a_3, \dots, a_n$, $(a_{n+1} = a_1)$ von a_1 reduziert, da

$$a_2 = [a_2, \dots, a_n, a_1;\ a_2]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ist. Somit ist

$$\frac{1}{a_2'} = \left\{ a_1, a_n, \dots, a_2; \frac{1}{a_2'} \right\},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

also speziell a_1 das nächste Ganze 2. Art zu $\frac{1}{a_2'}$. Da nun andererseits aus (1) durch Übergang zu den relativ-konjugierten folgt

$$\frac{1}{a_2'} = a_1 - a_1',$$

so stellt diese Gleichung die Zerlegung 2. Art [4]) von $\frac{1}{a_2'}$ dar. Daraus ergeben

---

[1]) H. I, § 1.
[2]) H. I, § 9 und II, § 2, S. 271.
[3]) H. I, § 3, S. 236 und I, § 9, S. 258.
[4]) H. I, § 9.

sich ohne weiteres die Bedingungen (29), wenn man hinzunimmt, daß a_1 als nächstes Ganzes 1. Art zu a_1 vom selben Typus wie a_1 ist.

Satz 2. *Damit eine quadratische Irrationalität a_1 über k reduziert ist, ist hinreichend, daß sie den Bedingungen* (27), (28) *genügt, sowie der etwas mehr als* (29) *besagenden Bedingung:*

$$(29') \quad \begin{cases} \text{falls } a_1 \text{ vom Typus } (1+i) \text{ ist, liegt } a_1' \text{ nicht in } \overline{\mathfrak{R}}_{1+i}, \\ \text{,, ,, ,, ,, (2) ,, ,, ,, ,, ,, } \overline{\mathfrak{R}}_{1\pm i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$ [1])

Der Beweis von Satz 2 beruht auf dem folgenden

Hilfssatz. *Ist für eine quadratische Irrationalität*

$$a_1 = [a_1, \ldots, a_\nu; a_{\nu+1}]$$

über k die Bedingung (27) *erfüllt, und genügt der Rest a_ν ($\nu \geqq 1$) den Bedingungen* (28), (29'), *so genügt auch der Rest $a_{\nu+1}$ diesen Bedingungen.*

Beweis des Hilfssatzes: Wir bemerken vorweg, daß das Folgegesetz B [2]), das im allgemeinen erst vom zweiten Teilnenner, also hier von a_2 an, gilt, hier schon von a_1 an richtig ist. Denn es wird ja allein aus der Tatsache erschlossen, daß alle Reste $a_2, a_3, \ldots$ in $\mathfrak{R}$ liegen. Das ist aber hier wegen der vorausgesetzten Bedingung (27) auch für a_1 der Fall.

a) $a_{\nu+1}$ genügt (28), d. h. $a_{\nu+1}'$ liegt in $\mathfrak{R}_0$ oder auch $|a_{\nu+1}'| < 1$.

Wäre nämlich $|a_{\nu+1}'| \geqq 1$, also $\left|\frac{1}{a_{\nu+1}'}\right| \leqq 1$, so folgte aus der sich aus (1) durch Übergang zu den relativ-konjugierten ergebenden Gleichung

$$a_\nu' = a_\nu - \frac{1}{a_{\nu+1}'}$$

und der für a_ν vorausgesetzten Bedingung (28), d. h. $|a_\nu'| < 1$, daß

$$|a_\nu| = \left| a_\nu' + \frac{1}{a_{\nu+1}'} \right| \leqq |a_\nu'| + \left|\frac{1}{a_{\nu+1}'}\right| < 2$$

wäre, also nach (11), daß $a_\nu = 0$ oder $\pm 1 \pm i$ wäre. $a_\nu = 0$ ist aber unmöglich, weil a_1 nach (27) und die übrigen a_ν nach H. I, § 3 von Null verschieden sind. Wäre ferner $a_\nu = \pm 1 \pm i$, so läge $a_\nu' = a_\nu - \frac{1}{a_{\nu+1}'}$ in dem betr. $\overline{\mathfrak{R}}_{\pm 1 \pm i}$, was den für a_ν vorausgesetzten Bedingungen (28), (29') widerspricht.

b) $a_{\nu+1}$ genügt (29'), d. h. falls $a_{\nu+1}$ vom Typus $\binom{1+i}{2}$ ist, liegt $a_{\nu+1}'$ nicht in $\binom{\overline{\mathfrak{R}}_{1+i}}{\overline{\mathfrak{R}}_{1\pm i}}$ und entsprechend für die anderen Typen.

---

[1]) Die Frage, ob auch schon (29) mit (27) und (28) hinreichend ist, d. h. ob a_1 auch reduziert ist, wenn a_1 in $\mathfrak{R}$ liegt und z. B. vom Typus $(1+i)$ ist und a_1' in $\underline{\mathfrak{R}}_0$ auf dem inneren Randbogen von $\overline{\mathfrak{R}}_{1+i}$ liegt, bleibt durch Satz 2 unentschieden. (Vergl. auch S. 82, Anm. 2 und S. 88, Anm.).

[2]) H. I, § 3. — Die hier gewählte Bezeichnung weicht von der in H. verwendeten insofern ab, als der erste Teilnenner a_1 (nicht a_0) genannt ist.

Es genügt, dies für die beiden genannten Typen zu zeigen. Sei also $a_{\nu+1}$ vom Typus $\binom{1+i}{2}$. Läge dann $a'_{\nu+1}$ doch in $\binom{\overline{\mathfrak{R}}_{1+i}}{\overline{\mathfrak{R}}_{1\pm i}}$, so läge, weil $a'_{\nu+1}$ nach a) jedenfalls auch in $\underline{\mathfrak{R}}_0$ liegt, $\frac{1}{a'_{\nu+1}}$ in $\binom{\overline{\mathfrak{R}}_{1-i}}{\overline{\mathfrak{R}}_{1\pm i}}$. Da nun nach (28) $|a'_\nu| < 1$ ist, könnte demnach die wie vorher von Null verschiedene Zahl a_ν nach (11) nur die Werte $\binom{1-i,\ -2i,\ 2-2i,\ 2}{1\pm i,\ \pm 2i,\ 2\pm 2i,\ 2}$ haben. Nach dem für $\nu \geqq 1$ geltenden Folgegesetz B ist aber, weil $a_{\nu+1}$ mit $a_{\nu+1}$ vom gleichen Typus, also vom Typus $\binom{1+i}{2}$ ist, $a_\nu \not\equiv \binom{1-i}{1\pm i}$, so daß für a_ν nur die Werte $\binom{-2i,\ 2-2i,\ 2}{\pm 2i,\ 2\pm 2i,\ 2}$ blieben. Aber auch diese Werte kann a_ν nicht haben. Denn dann läge $a'_\nu = a_\nu - \frac{1}{a'_{\nu+1}}$ im oberen Falle bezw. in

$$(-2i,\ 2-2i,\ 2) - \overline{\mathfrak{R}}_{1-i} = (\overline{\mathfrak{R}}_{-1-i},\ \overline{\mathfrak{R}}_{1-i},\ \overline{\mathfrak{R}}_{1+i}),$$

im unteren Falle bezw. in

$$(2i,\ 2+2i,\ 2,\ 2-2i,\ -2i) - \overline{\mathfrak{R}}_{1\pm i}$$
$$= (\overline{\mathfrak{R}}_{-1+i} \text{ oder } \overline{\mathfrak{R}}_{-1+3i},\ \overline{\mathfrak{R}}_{1+i} \text{ oder } \overline{\mathfrak{R}}_{1+3i},\ \overline{\mathfrak{R}}_{1-i} \text{ oder } \overline{\mathfrak{R}}_{1+i},\ \overline{\mathfrak{R}}_{1-3i} \text{ oder } \overline{\mathfrak{R}}_{1-i},\ \overline{\mathfrak{R}}_{-1-3i} \text{ oder } \overline{\mathfrak{R}}_{-1-i}),$$

was jedesmal den für a_ν vorausgesetzten Bedingungen (28), (29′) widerspricht.

Beweis von Satz 2: Ist a_1 eine quadratische Irrationalität über k, so ist zunächst die Kettenbruchentwicklung 1. Art von a_1 periodisch:

$$a_1 = [a_1, \ldots, a_\varkappa;\ \overline{a_{\varkappa+1}, \cdots, a_{\varkappa+n}};\ \ldots].$$

Dann gelten wie vorher nach (1) die Gleichungen

$$a'_\varkappa = a_\varkappa - \frac{1}{a'_{\varkappa+1}},\quad a'_{\varkappa+n} = a_{\varkappa+n} - \frac{1}{a'_{\varkappa+n+1}},$$

wobei der Periodizität wegen $a_{\varkappa+1} = a_{\varkappa+n+1}$, d. h. auch $a'_{\varkappa+1} = a'_{\varkappa+n+1}$ ist. Demnach folgt

$$a_\varkappa - a'_\varkappa = a_{\varkappa+n} - a'_{\varkappa+n}.$$

Sind nun die Bedingungen (27), (28), (29′) für a_1 erfüllt, so gelten nach dem Hilfssatz (28), (29′) (trivialerweise übrigens auch (27)) auch für alle folgenden Reste a_ν, insbesondere also auch für $a_\varkappa$ und $a_{\varkappa+n}$. Daher liegen die beiden nach obigem einander gleichen Zahlen

$$a_\varkappa - a'_\varkappa \quad \text{in } \mathfrak{R}_{a_\varkappa}$$
$$a_{\varkappa+n} - a'_{\varkappa+n} \text{ in } \mathfrak{R}_{a_{\varkappa+n}}.$$

Da nun $\mathfrak{R}_{a_\varkappa}$ und $\mathfrak{R}_{a_{\varkappa+n}}$ keinen Punkt gemeinsam haben, falls $a_\varkappa \not\equiv a_{\varkappa+n}$ ist [1]), folgt $a_\varkappa = a_{\varkappa+n}$, also

[1]) H. I, §§ 6, 9.

$$a_1 = [a_1, \ldots, a_{x-1}; \overline{a_x, a_{x+1}, \ldots, a_{x+n-1}}; \ldots].$$

So fortfahrend ergibt sich für a_1 die rein-periodische Entwicklung

$$a_1 = [\overline{a_1, \ldots, a_n}; \ldots].$$

Somit ist a_1 reduziert.

§ 4. Die Kettenbruchentwicklung 1. Art der normierten Basiszahl ω_0.

Satz 3. *Die Kettenbruchentwicklung 1. Art der normierten Basiszahl ω_0 eines normierten relativ-quadratischen Körpers K über k hat eine (nicht notwendig kleinste) eingliedrige Vorperiode:*

$$\omega_0 = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_n}; \omega_1] = \left[a_0; \overline{a_1, \ldots, a_n}; \frac{1}{a_0 - \omega_0}\right].$$

Beweis: Wir führen den Beweis zunächst für den Fall, daß $|\omega_0'| > 1$ ist. Es sei

$$\omega_0 = [a_0; \omega_1] = a_0 - \frac{1}{\omega_1}.$$

Dann ist zu zeigen, daß $\omega_1 = \dfrac{1}{a_0 - \omega_0}$ reduziert ist. Dazu genügt nach Satz 2 der Nachweis, daß ω_1 die Bedingungen (27), (28), (29′) erfüllt. Daß (27) für ω_1 erfüllt ist, ist klar, weil ω_1 ein Rest 1. Art ist. Daß (28) und (29′) für ω_1 erfüllt sind, zeigen wir durch Nachweis der weitergehenden Tatsache, daß $\omega_1' = \dfrac{1}{a_0 - \omega_0'}$ in $\underline{\mathfrak{K}}_0$, aber in keinem der Kreise $\overline{\mathfrak{K}}_{\pm 1 \pm i}$ liegt, oder, was gleichbedeutend ist, daß $\dfrac{1}{\omega_1'} = a_0 - \omega_0'$ in $\mathfrak{K}'$ aber in keinem der Kreise $\overline{\mathfrak{K}}_{\pm 1 \pm i}$ liegt. Das letztgenannte Gebiet bezeichnen wir kurz mit $\mathfrak{G}'$ (Fig. 1). Wir unterscheiden dann die vier Fälle (18) a) — d) für ω_0. Nach (17), (18) und der Annahme $|\omega_0'| > 1$ liegen ω_0 und $-\omega_0'$ für die genannten vier Fälle bezw. in den in Fig. 2 a, Fig. 2 b und 2 b′, Fig. 2 c und 2 c′, Fig. 2 d und 2 d′ schraffierten Gebieten [1]). Die Gebiete für ω_0 lassen erkennen, daß ω_0 und somit a_0 bezw. vom Typus $(1 + i)$ oder (2), $(1 - i)$ oder (2), $(1 + i)$ oder (2), $(1 + i)$ oder (2) (insbesondere auch $a_0 \neq 0$) ist.

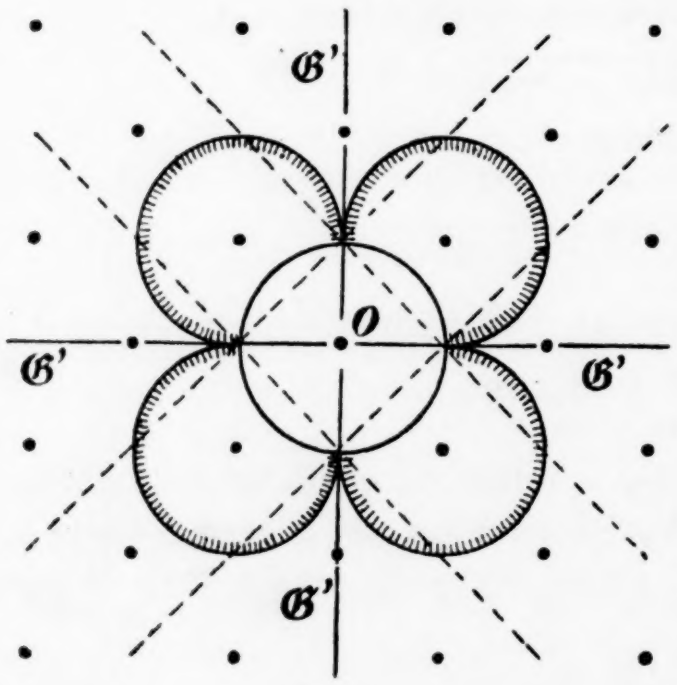


Fig. 1.

[1]) Randlinien sollen immer zu demjenigen der durch sie getrennten Gebiete gehören, auf dessen Seite sie gestrichelt sind.

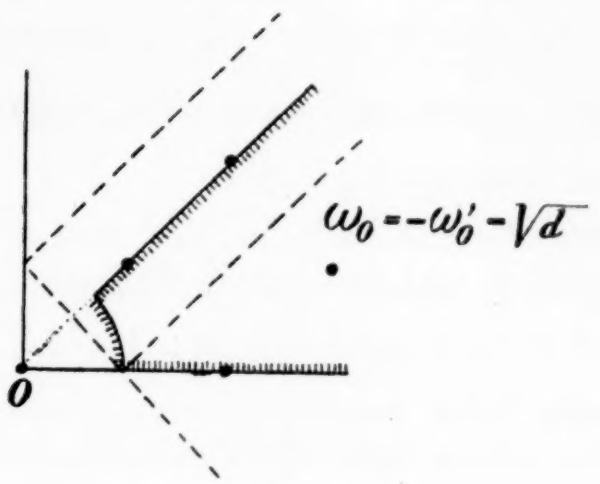


Fig. 2 a.

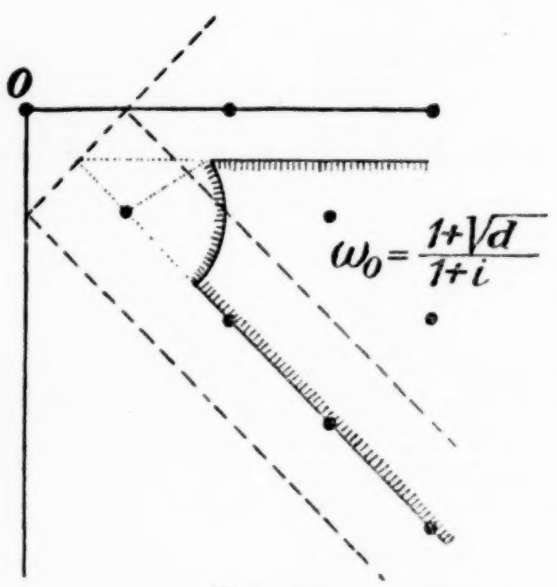


Fig. 2 b.

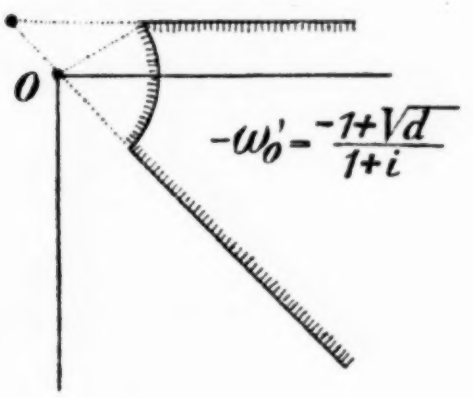


Fig. 2 b'.

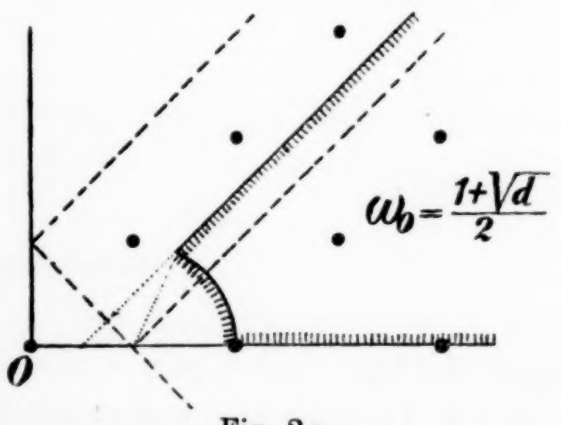


Fig. 2 c.

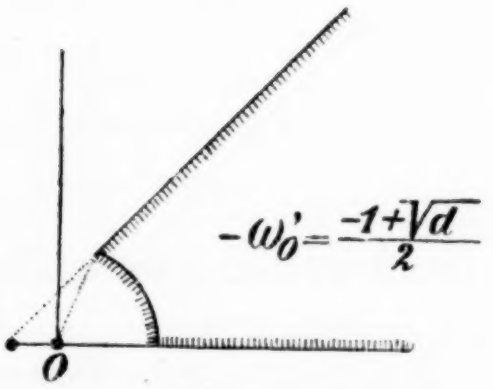


Fig. 2 c'.

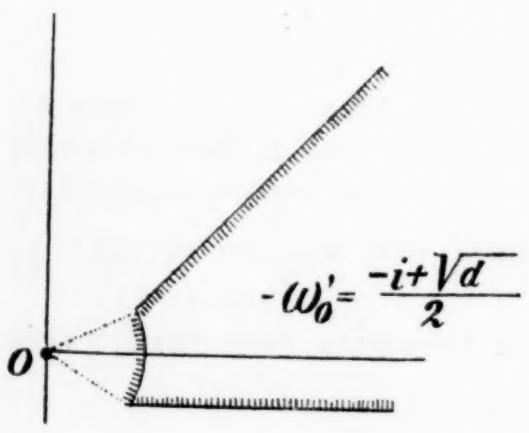


Fig. 2 d.

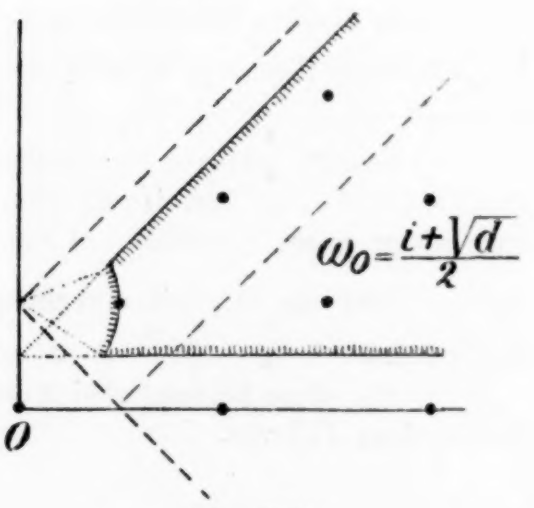


Fig. 2 d'.

Durch Antragen [1]) der Gebiete für $-\omega_0'$ an irgendeine gerade Zahl $a_0 \neq 0$ der genannten betr. Typen ersieht man dann ohne weiteres, daß $\frac{1}{\omega_1'} = a_0 - \omega_0'$ stets in $\mathfrak{G}'$ liegt, was die Behauptung ergibt.

Der eingangs ausgeschlossene Fall $|\omega_0'| \leqq 1$ liegt nun, wie man leicht bestätigt, nur für die folgenden acht normierten Erzeugenden vor:

$$d = i, 3;\ 1+2i, 3+2i, 5+2i;\ 1+4i, 5, 5+4i\,.$$

Durch direkte Ausrechnung findet man für die ersten beiden Fälle, die den beiden Kreisteilungskörpern (21) entsprechen, die Entwicklungen

$$(30)\qquad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{i} = [1+i;\ \overline{2-2i};\ i\omega_1] \\ \omega_0 = \dfrac{i+\sqrt{3}}{2} = [1+i;\ \overline{-2i, -2};\ -\omega_1] \end{cases}$$

mit eingliedriger Vorperiode [2]), für die übrigen sechs Fälle die rein-periodischen Entwicklungen

$$\omega_0 = \frac{1+\sqrt{1+2i}}{1+i} = [\overline{1-i;\ -\omega_0}]$$

$$\omega_0 = \frac{1+\sqrt{3+2i}}{1+i} = [\overline{1-i, -2, -1-i, 1+i;\ -\omega_0}]$$

$$\omega_0 = \frac{1+\sqrt{5+2i}}{1+i} = [\overline{2-2i, 2i, -1-i;\ \omega_0}]$$

$$\omega_0 = \frac{1+\sqrt{1+4i}}{2} = [\overline{1+i, -1-i;\ -i\omega_0}]$$

$$\omega_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [\overline{2, 2;\ -\omega_0}]$$

$$\omega_0 = \frac{1+\sqrt{5+4i}}{2} = [\overline{2, 1+i;\ i\omega_0}].$$

Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

§ 5. Notwendige Bedingungen dafür, daß eine Einheit ε durch die Kettenbruchentwicklung 1. Art von ω_0 geliefert wird.

Wir stellen zunächst fest, in welcher Weise ein rein-periodischer Kettenbruch 1. Art Einheiten aus relativ-quadratischen Körpern über k liefert:

---

[1]) Zwecks größerer Anschaulichkeit stelle man sich für diesen Schluß je ein Pausblatt der Fig. 2a, 2b′, 2c′, 2d′ her, das die Koordinatenachsen und die Randlinie des Gebietes für $-\omega_0'$ enthält, und bringe dieses Pausblatt mit Fig. 1 so zur Deckung, daß das Koordinatensystem parallel nach den im Text als möglich erkannten a_0 verschoben ist. Dadurch sieht man, wo $a_0 - \omega_0' = \frac{1}{\omega_1'}$ liegen kann.

[2]) Für diese beiden Entwicklungen liegt der a. S. 78, Anm. 2 erwähnte, durch Satz 1, 2 nicht entschiedene Fall vor.

Satz 4. *Es sei* $a_1 = [\overline{a_1, \ldots, a_n}; i^m a_1]$ *ein rein-periodischer Kettenbruch* 1. *Art mit einer n-gliedrigen (nicht notwendig primitiven) Teilperiode vom Faktor* i^m. *Dann ist* [1])

$$\varepsilon_n = i^m q_n a_1 - q_{n-1} \tag{31}$$

eine Einheit aus dem relativ-quadratischen Körper $K = k(a_1)$ *mit der Relativnorm*

$$n(\varepsilon_n) = i^m$$

und von einem Betrage

$$|\varepsilon_n| > 1 .$$

Auf dieselbe Weise liefert die ln-gliedrige Teilperiode die Einheit

$$\varepsilon_{ln} = \begin{cases} \varepsilon_n^l & \text{für gerades } n \\ (-i)^{\left[\frac{l}{2}\right] m} \varepsilon_n^l & \text{für ungerades } n. \end{cases} \tag{32}$$

Beweis: a) Wegen $a_{n+1} = i^m a_1$ gehen die Relationen (9), (10) für $\nu = n$ über in (31) und

$$\varepsilon_n \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \end{pmatrix} = A_1 \ldots A_n \begin{pmatrix} -1 \\ i^m a_1 \end{pmatrix} = A_1 \ldots A_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \end{pmatrix} = P_0^{-1} P_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$E_n = A_1 \ldots A_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix} = P_0^{-1} P_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix}, \tag{34}$$

so genügt die Zahl ε_n aus $k(a_1)$ der charakteristischen Gleichung

$$|E_n - \varepsilon_n E| = 0$$

der ganzzahligen Matrix E_n aus k und ist somit eine Einheit aus $k(a_1)$, deren Relativnorm sich nach (6) zu

$$n(\varepsilon_n) = |E_n| = i^m$$

berechnet.

b) Natürlich kann n in a) durch jedes Vielfache ln ersetzt werden. Wenden wir nun die Relationen (15), (16) auf die bei a_1 beginnenden λn-gliedrigen Teilperioden an, deren Faktoren durch (14) gegeben sind, so folgt für gerades n:

$$A_{(\lambda-1)n+1} \ldots A_{(\lambda-1)n+n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^{(\lambda-1)m} \end{pmatrix} A_1 \ldots A_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-i)^{(\lambda-1)m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^{(\lambda-1)m} \end{pmatrix} E_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-i)^{\lambda m} \end{pmatrix},$$

für ungerades n:

$$A_{(\lambda-1)n+1} \ldots A_{(\lambda-1)n+n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^{(\lambda-1)^2 m} \end{pmatrix} A_1 \ldots A_n \begin{pmatrix} (-i)^{(\lambda-1)^2 m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^{(\lambda-1)^2 m} \end{pmatrix} E_n \begin{pmatrix} (-i)^{(\lambda-1)^2 m} & 0 \\ 0 & (-i)^m \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Die Bezeichnungen von § 1 werden übernommen.

Setzen wir aus diesen Bausteinen ($\lambda = 1, \ldots, l$)

$$E_{ln} = \begin{cases} A_1 \ldots A_{ln} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^{lm} \end{pmatrix} & \text{für gerades } n \\ A_1 \ldots A_{ln} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^{n\,m} \end{pmatrix} & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

gemäß (34) zusammen, so vereinigen sich je zwei aufeinanderfolgende „Zwischenfaktoren" zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-i)^{\lambda m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^{\lambda m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für gerades } n$$

$$\begin{pmatrix} (-i)^{(\lambda-1)^2 m} & 0 \\ 0 & (-i)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^{\lambda^2 m} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} (-i)^m & 0 \\ 0 & (-i)^m \end{pmatrix} = (-i)^m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für gerades } \lambda \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für ungerades } \lambda \end{array} \right\} \text{ und ungerades } n.$$

Somit wird

$$E_{ln} = \begin{cases} E_n^l & \text{für gerades } n \\ (-i)^{\left[\frac{l}{2}\right] m} E_n^l & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

Da nun aus (33), (34) durch l-malige Anwendung der Substitution E_n folgt

$$\varepsilon_n^l \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \end{pmatrix} = E_n^l \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

so ergibt der Vergleich mit der nach (33), (34) bestehenden Relation

$$\varepsilon_{ln} \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \end{pmatrix} = E_{ln} \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

die Formeln (32) des Satzes.

c) Schließlich ist nach (31) und (32)

$$|\varepsilon_n|^l = |\varepsilon_{ln}| \geqq |q_{ln}| \left(|a_1| - \left| \frac{q_{ln-1}}{q_{ln}} \right| \right) > |q_{ln}| (|a_1| - 1) \quad [1].$$

Da nun a_1 nach Satz 1 in $\mathfrak{R}$ liegt und als nicht zu k gehörige Zahl von $\pm 1, \pm i$ verschieden ist, ist $|a_1| > 1$. Somit wächst $|\varepsilon_n|^l$ mit l über alle Grenzen [2]), so daß $|\varepsilon_n| > 1$ ist.

Damit ist Satz 4 bewiesen. Für einen Kettenbruch a_0 mit eingliedriger Vorperiode lassen sich die durch den rein-periodischen Kettenbruch a_1 gemäß Satz 4 gelieferten Einheiten auch direkt durch die Näherungszahlen von a_0 ausdrücken, was wegen Satz 3 für unseren Zweck von Bedeutung ist:

Satz 5. *Es sei* $a_0 = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_n}; i^m a_1]$ *ein Kettenbruch* 1. *Art mit einer (nicht notwendig kleinsten) eingliedrigen Vorperiode und einer (nicht notwendig*

---

[1]) H. I, § 6.
[2]) H. I, § 6.

primitiven) n-gliedrigen Teilperiode vom Faktor i^m. Dann drückt sich die durch den rein-periodischen Kettenbruch 1. Art $\alpha_1 = [\overline{a_1, \ldots, a_n}; i^m a_1]$ gemäß Satz 4 gelieferte Einheit ε_n durch die Näherungszahlen p_ν, q_ν des Kettenbruchs α_0 in der Form

$$\varepsilon_n = p_{n-1} - q_{n-1} a_0' \tag{35}$$

aus [1]).

Beweis: Nach (1), (2) ist

$$a_1 \begin{pmatrix} -1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Führt man dies in (33) ein, so erhält man nach Wegheben des Faktors a_1:

$$\varepsilon_n \begin{pmatrix} -1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A_0 \ldots A_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix} A_0^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ a_0 \end{pmatrix} = P_{-1}^{-1} P_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix} A_0^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} p_n \\ q_{n-1} q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

oder

$$\varepsilon_n \begin{pmatrix} -1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_0 q_{n-1} + i^m q_n & -q_{n-1} \\ a_0 p_{n-1} - i^m p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ a_0 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Andererseits kann, weil a_0' nicht zu k gehört,

$$\varepsilon = p - q a_0' = (p - q s(a_0)) + q a_0$$

mit p, q aus k gesetzt werden, was

$$\varepsilon a_0 = -q n(a_0) + p a_0,$$

also die Substitution

$$\varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - q s(a_0) & -q \\ q n(a_0) & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ a_0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

ergibt. Da die Koeffizienten von (36), wie die von (37) zu k gehören, a_0 aber nicht, sind beide Substitutionen identisch, d. h. $p = p_{n-1}$, $q = q_{n-1}$, was die Formel (35) des Satzes ergibt.

Aus den Sätzen 3, 4, 5 entnehmen wir nun folgendes Kriterium:

Satz 6. *Damit eine Einheit ε oder eine zu ε assoziierte Einheit eines normierten relativ-quadratischen Körpers K über k durch die Kettenbruchentwicklung 1. Art der normierten Basiszahl ω_0 von K gemäß Satz 4, 5 geliefert wird, ist notwendig, daß*

$$|\varepsilon| > 1 \text{ ist}, \tag{38}$$

(39) *ε zum Ring K_{1+i} gehört, falls $n(\omega_0)$ gerade oder $s(\omega_0)$ ungerade ist.*

Beweis: Da die Bedingungen (38), (39) bei Ersetzung von ε durch assoziierte invariant sind, genügt es anzunehmen, daß ε selbst die durch eine n-gliedrige

---

[1]) Dabei ist die Nummerierung der p_ν, q_ν nach der der a_ν gerichtet zu denken. Es gelten dann die Formeln (2) — (10) des § 1 für den Kettenbruch α_0, wenn man nur $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ durch $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$ und P_0 durch P_{-1} ersetzt.

Teilperiode des Kettenbruchs ω_0 gemäß Satz 3, 4, 5 gelieferte Einheit ε_n ist. Daß dann (38) erfüllt ist, ist nach Satz 4 klar. Ferner haben wir nach (35):

$$\varepsilon_n = p_{n-1} - q_{n-1}\omega_0',$$

und darin ist ω_0' eine ganze Zahl aus K, die natürlich ebenso wie ω_0 mit 1 zusammen eine Relativbasis von K bezgl. k bildet. Daß ε_n zu K_{1+i} gehört, ist also gleichbedeutend damit, daß q_{n-1} gerade ist. Gehört daher ε_n nicht zu K_{1+i}, so muß die Substitution (36) (für $a_0 = \omega_0$) nach (11), (12) zur Restklasse $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mod. $(1+i)$ gehören, und somit wegen der Identität von (36) und (37) und wegen der Basiseigenschaft von ω_0 die Kongruenz

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} + s(\omega_0)\, q_{n-1} & q_{n-1} \\ n(\omega_0)\, q_{n-1} & p_{n-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mod. } (1+i)$$

bestehen. Hieraus folgt, daß dann $n(\omega_0)$ ungerade, $s(\omega_0)$ gerade sein muß. Ist dies also nicht der Fall, so gehört ε_n zu K_{1+i}, wie in (39) behauptet.

§ 6. Hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Einheit ε durch die Kettenbruchentwicklung 1. Art von ω_0 geliefert wird.

Satz 7. *Die Bedingungen* (38), (39) *von Satz* 6 *sind — von den beiden Kreisteilungskörpern* (21) *abgesehen — auch hinreichend dafür, daß eine Einheit ε oder eine zu ε assoziierte Einheit eines normierten relativ-quadratischen Körpers K über k durch die Kettenbruchentwicklung* 1. *Art der normierten Basiszahl ω_0 von K gemäß Satz* 4, 5 *geliefert wird. Ist also ε eine diesen Bedingungen genügende Einheit aus K mit $n(\varepsilon) = i^m$, so existiert ein n und ein $\varkappa$, so daß die Kettenbruchentwicklung* 1. *Art von ω_0 eine bei ω_1 beginnende n-gliedrige Teilperiode vom Faktor $n(i^\varkappa \varepsilon) = (-1)^\varkappa i^m$ hat und $i^\varkappa \varepsilon = p_{n-1} - q_{n-1}\omega_0'$ ist.*

Beweis: Es sei ε eine (38), (39) genügende Einheit aus K mit $n(\varepsilon) = i^m$. Wegen der Basiseigenschaft von ω_0' kann

$$\varepsilon = p - q\omega_0'$$

mit ganzen p, q aus k gesetzt werden, und es ist dann (wie oben (37))

$$\varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ \omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - q\, s(\omega_0) & -q \\ q\, n(\omega_0) & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \omega_0 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Gehört nun ε zu K_{1+i}, ist also q gerade, so ist nach (40) durch Determinantenbildung

$$1 \equiv i^m \equiv n(\varepsilon) \equiv p^2 \text{ mod. } (1+i),$$

also p ungerade und somit die Substitution (40) zur Restklasse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mod. $(1+i)$ gehörig. Gehört aber ε nicht zu K_{1+i}, ist also q ungerade, so ist wegen der vorausgesetzten Bedingung (39) $n(\omega_0)$ ungerade, $s(\omega_0)$ gerade, also nach (40) durch Determinantenbildung

$$1 \equiv i^m \equiv n(\varepsilon) \equiv p^2 + 1 \bmod (1+i),$$

also p gerade und somit die Substitution (40) zur Restklasse $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mod. $(1+i)$ gehörig. Setzt man also

$$\varepsilon \begin{pmatrix} - \\ \omega_0 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \\ \omega_0 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} - \\ i^m \omega_0 \end{pmatrix},$$

so ist S eine ganzzahlige, der Kongruenzbedingung

$$S \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bmod (1+i)$$

unterworfene Substitution aus k mit

$$|S| = 1.$$

Geht man mittels

$$\omega_1 \begin{pmatrix} - \\ \omega_0 \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} - \\ \omega_1 \end{pmatrix}$$

zu ω_1 über, so folgt nach Wegheben des Faktors ω_1

$$\varepsilon \begin{pmatrix} - \\ \omega_1 \end{pmatrix} = A_0^{-1} S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} - \\ \omega_1 \end{pmatrix}$$

$$= A_0^{-1} S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^m \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-i)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \\ i^m \omega_1 \end{pmatrix}$$

oder zur Abkürzung

$$\varepsilon \begin{pmatrix} - \\ \omega_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} - \\ i^m \omega_1 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

wobei auch T eine ganzzahlige, der Kongruenzbedingung

$$T \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bmod (1+i) \tag{42}$$

unterworfene Substitution aus k mit

$$|T| = 1 \tag{43}$$

ist.

Da nun K von den beiden Kreisteilungskörpern (21) verschieden vorausgesetzt wird, liegt $\frac{1}{\omega_1'} = a_0 - \omega_0'$ nicht auf dem Rande eines der vier Kreise $\overline{\mathfrak{K}}_{\pm 1 \pm i}$. Wäre das nämlich der Fall, so folgte nach (18) eine Relation

$$|a + \sqrt{d}| = \sqrt{2^\nu} \qquad (\nu = 0, 1 \text{ oder } 2)$$

mit ganzem a aus k, also

$$2^\nu = |a + \sqrt{d}|^2 = (a + \sqrt{d})(\bar{a} + \overline{\sqrt{d}}) = N(a) + \sqrt{N(d)} + a\overline{\sqrt{d}} + \bar{a}\sqrt{d} \quad [1])$$

oder

---

[1]) Hierbei ist $\sqrt{N(d)} = \sqrt{d}\,\overline{\sqrt{d}} > 0$ zu rechnen.

$$\begin{aligned}&(2^\nu - N(a) - \sqrt{N(d)})^2\\ &= 2^{2\nu} + N(a)^2 + N(d) - 2^{\nu+1} N(a) - 2^{\nu+1}\sqrt{N(d)} + 2N(a)\sqrt{N(d)}\\ &= (a\sqrt{d} + \bar{a}\sqrt{d})^2 = S(\bar{a}^2 d) + 2N(a)\sqrt{N(d)}.\end{aligned}$$

Es wäre also $\sqrt{N(d)}$ rational und somit, da d quadratfrei, unter Berücksichtigung von (17)

$$d = D \quad \text{oder} \quad d = iD$$

mit rationalem, quadratfreiem, positivem, ungeradem D (im ersteren Falle natürlich auch $D \neq 1$). Für $d = D$ folgte weiter

$$2^\nu = N(a) + D + S(a)\sqrt{D},$$

also $S(a) = 0$, weil D quadratfrei und $\neq 1$ ist. Da D positiv ungerade, also $\geqq 3$ und $\neq 4$ ist, müßte dann $\nu = 2$, d. h. $N(a) = 1$, $D = 3$ sein, was $d = 3$, also den einen der Kreisteilungskörper (21) ergibt. Für $d = iD$, also $\sqrt{d} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{D}$, $\sqrt{\bar{d}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{D}$ folgte weiter

$$2^\nu = N(a) + D + \frac{\bar{a}(1+i) + a(1-i)}{\sqrt{2}}\sqrt{D}$$

oder wenn $a = A + iB$ gesetzt wird,

$$2^\nu = N(a) + D + (A+B)\sqrt{2D},$$

also $A + B = 0$, weil D ungerade ist. Dann wäre $N(a) = 2A^2$, also

$$2^\nu = 2A^2 + D,$$

und, weil D ungerade ist, $\nu = 0$, weil ferner $D \geqq 1$ ist, $A = 0$, $D = 1$, was $d = i$, also den anderen der Kreisteilungskörper (21) ergibt. Für von den beiden Kreisteilungskörpern (21) verschiedene Körper K liegt also $\frac{1}{\omega_1'}$ nicht auf dem Rande eines der vier Kreise $\overline{\mathfrak{K}}_{\pm 1 \pm i}$.

Nach H. II, § 4, Theorem II [1]) existieren dann wegen (41), (42), (43), wenn

$$\omega_1 = [a_1, a_2, \ldots]$$

die Kettenbruchentwicklung 1. Art von ω_1, also

$$i^m \omega_1 = [i^m a_1, (-i)^m a_2, \ldots]$$

die von $i^m \omega_1$ ist, Indizes μ, ν und ein $\lambda \bmod 2$, so daß

$$(44) \qquad i^m \omega_1 = [i^m a_1, (-i)^m a_2, \ldots, ((-1)^{\mu-1} i)^m a_\mu;\ i^m \omega_1]$$

---

[1]) Dieser Satz ist in der Tat nur richtig, wenn $\frac{1}{\omega_1'}$ (in dortiger Bezeichnung $\frac{1}{y_0}$) nicht auf dem Rande eines der vier Kreise $\overline{\mathfrak{K}}_{\pm 1 \pm i}$ liegt, was von *J. Hurwitz* übersehen wurde. Es darf nämlich der Schluß auf die Relation $b_r = \pm a_n$ auf S. 284 unten in diesen Fällen nicht vollzogen werden. — Da für die beiden Kreisteilungskörper (21) nach (30): $\frac{1}{\omega_1'} = 1 + i - \omega_0' = \begin{cases} 1+i+\iota \\ 1+i+\varrho^5 \end{cases}$ auf dem Rande von $\overline{\mathfrak{K}}_{1+i}$ liegt, müssen diese beiden Körper auch wirklich ausgenommen werden.

$$\omega_1 = [a_1, \ldots, a_\nu;\ (-1)^\lambda i^m \omega_1] \tag{45}$$

ist, und daß die inhomogene Substitution (41) durch Elimination von $i^m\omega_1$ zwischen den aus (44) und (45) nach (8) und (15), (16) folgenden Substitutionen

$$\binom{-1}{i^m\omega_1} \sim \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i^m\end{pmatrix} A_1 \ldots A_\mu \left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-i)^m\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}(-i)^m & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{matrix}\right]^{\begin{matrix}\mu \text{ gerade}\\ \mu \text{ ungerade}\end{matrix}} \binom{-1}{i^m\omega_1} = M\binom{-1}{i^m\omega_1} \text{ mit } |M| = 1 \tag{46}$$

$$\binom{-1}{\omega_1} \sim A_1 \ldots A_\nu \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-1)^\lambda\end{pmatrix}\binom{-1}{i^m\omega_1} = N\binom{-1}{i^m\omega_1} \text{ mit } |N| = (-1)^\lambda \tag{47}$$

entsteht, d. h. genauer gesagt dadurch, daß die inverse zu (46) mit (47) zusammengesetzt wird. Es ist also

$$T\binom{-1}{i^m\omega_1} \sim N M^{-1}\binom{-1}{i^m\omega_1}.$$

Da nun T, M, N Substitutionen aus k sind, $i^m\omega_1$ aber nicht zu k gehört, folgt hieraus

$$T = cNM^{-1} \tag{48}$$

mit c aus k. Aus (48) nebst (42), (46), (47) ergibt sich durch Determinantenbildung

$$c^2 = (-1)^\lambda,$$

d. h.

$$c = i^\lambda, \tag{49}$$

wenn das bisher nur mod. 2 bestimmte λ nunmehr auch mod. 4 in geeigneter Weise festgelegt wird. Sind nun ε_μ, ε_ν die den Substitutionen (46), (47) entsprechenden Proportionalitätsfaktoren, also

$$\varepsilon_\mu\binom{-1}{i^m\omega_1} = M\binom{-1}{i^m\omega_1},\quad \varepsilon_\nu\binom{-1}{\omega_1} = N\binom{-1}{i^m\omega_1},$$

so daß

$$\varepsilon_\nu\varepsilon_\mu^{-1}\binom{-1}{\omega_1} = NM^{-1}\binom{-1}{i^m\omega_1} \tag{50}$$

ist, so folgt aus (41), (48), (49), (50):

$$\varepsilon = i^\lambda\varepsilon_\nu\varepsilon_\mu^{-1}.$$

Dabei sind ε_μ, ε_ν die an der μ-gliedrigen bezw. ν-gliedrigen Teilperiode des Kettenbruchs ω_1 gemäß Satz 4 gelieferten Einheiten, sodaß wegen der vorausgesetzten Bedingung (38) zunächst $\nu > \mu$ und demnach ε zu der an der $(\nu-\mu)$-gliedrigen Teilperiode gelieferten (nach Satz 4 zu $\varepsilon_\nu\varepsilon_\mu^{-1}$ assoziierten) Einheit $\varepsilon_{\nu-\mu}$ assoziiert ist. Damit ist Satz 7 bewiesen[1]).

---

[1]) Der aus Satz 7 in Verbindung mit Satz 4 entspringende Beweis des *Dirichlet*schen Satzes (zunächst allgemein nur für K_{1+i}, daraus aber leicht auch für K_1) bezieht sich wegen der für Satz 7 notwendigen Einschränkung auf $K \neq k(\sqrt{i}), k(\sqrt{3})$ ebenfalls nicht auf diese beiden Körper (vergl. S. 74, Anm. 2).

Aus Satz 7 folgt insbesondere, daß die durch die *primitive* Teilperiode der Kettenbruchentwicklung 1. Art von ω_0 gelieferte Einheit ε_{n_1} eine *Grundeinheit* vom Betrage > 1 von K_{1+i} oder schon von K_1 ist. Unter Berücksichtigung von (19) und (24), (26) ergibt sich in dieser Hinsicht aus Satz 7 genauer:

$$(51)\quad \begin{cases} \text{a)} & \varepsilon_{n_1} & \text{ist Grundeinheit von } K, \text{ wenn } n(\omega_0) \not\equiv s(\omega_0) & \text{mod. } (1+i) \text{ ist} \\ \text{b)} & \varepsilon_{n_1} \text{ oder } \varepsilon_{n_1}^2 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & n(\omega_0) \equiv s(\omega_0) \equiv 0 \text{ mod. } (1+i) \text{ ,,} \\ \text{c)} & \varepsilon_{n_1} \text{ oder } \varepsilon_{n_1}^3 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & n(\omega_0) \equiv s(\omega_0) \equiv 1 \text{ mod. } (1+i) \text{ ,,.} \end{cases}$$

Dies Resultat (nicht aber auch Satz 7) gilt auch noch für den Kreisteilungskörper $k(\sqrt{i})$ (Fall a)). Die durch $\omega_0 = \sqrt{i} = \iota$ an der primitiven Teilperiode gelieferte Einheit berechnet sich nämlich nach (30) und Satz 5 zu

$$(52)\qquad \varepsilon_{n_1} = 1 + i + \iota = \iota(1 + \sqrt{2}),$$

und das ist nach den Entwicklungen des folgenden Paragraphen eine Grundeinheit von K_1. Für den Kreisteilungskörper $k(\sqrt{3})$ dagegen (Fall c)) gilt (51) c) nicht. Die durch $\omega_0 = \dfrac{i+\sqrt{3}}{2} = \varrho$ an der primitiven Teilperiode gelieferte Einheit berechnet sich nämlich nach (30) und Satz 5 zu

$$(53)\qquad \varepsilon_{n_1} = -(1 + 2i + 2i\varrho) = -i(2 + \sqrt{3}) = (i + (-1+i)\varrho)^2,$$

und die Einheit $i + (-1+i)\varrho$ ist nach den Entwicklungen des folgenden Paragraphen eine Grundeinheit von K_1.

§ 7. Der Abelsche Fall.

Wir gehen zum Schluß noch auf die Abelschen unter unseren Körpern K ein. Ist der Körper $K = k(\sqrt{d})$ mit der normierten Erzeugenden $\sqrt{d}$ Abelsch, so muß $k(\sqrt{d}) = k(\sqrt{\bar{d}})$, d. h. $d = c^2\bar{d}$ mit c aus k sein. Da d und $\bar{d}$ quadratfrei sind, ist dabei c Einheit, also $c^2 = \pm 1$ und somit $d = \pm\bar{d}$, d. h. d reell-positiv oder rein-imaginär-positiv. Es kann dann K aus $k = R(\sqrt{-1})$ durch Komposition mit einem reell-quadratischen Körper $k_1 = R(\sqrt{d_1})$ hergeleitet werden. Man hat dazu nur $d_1 = d$ bezw. $d_1 = -2id = (1-i)^2 d$ zu setzen, je nachdem $d = \bar{d}$ oder $d = -\bar{d}$ ist. Umgekehrt liefert jedes solche Kompositum $R(\sqrt{-1}, \sqrt{d_1})$, wo d_1 eine quadratfreie, positive ganze Zahl $\neq 1$ ist, einen Abelschen Körper $K = k(\sqrt{d})$ mit der normierten Erzeugenden $\sqrt{d}$, wenn $d = d_1$ bezw. $d = \dfrac{d_1}{-2i} = \dfrac{d_1}{(1-i)^2}$ gesetzt wird, je nachdem d_1 ungerade oder gerade ist.

Wir beweisen nun hinsichtlich der Grundeinheiten von K und k_1

Satz 8. *Ist $K = k(\sqrt{d})$ Abelsch $(d \neq i)$ und aus $k = R(\sqrt{-1})$ und $k_1 = R(\sqrt{d_1})$ komponiert, so ist eine Grundeinheit η_1 von k_1 zum Quadrat einer Grundeinheit ε_1 von K adjungiert oder selbst Grundeinheit von k, je nachdem die Primzahl 2 in k_1 Quadrat eines Hauptideals ist oder nicht.*

Beweis: Es darf ohne Einschränkung $\eta_1 > 1$, $|\varepsilon_1| > 1$ angenommen werden. Da für ein a aus K unter den Voraussetzungen des Satzes $|a|^2 = a\bar{a}$ gleichzeitig die Relativnorm von a in bezug auf den reellen Unterkörper k_1 von K ist, verwenden wir dafür auch die Bezeichnung $\nu(a)$.

Es ist $\nu(\varepsilon_1) = \eta$ eine Einheit aus k_1. Wegen $\eta = |\varepsilon_1|^2 > 1$ gilt für sie $\eta = \eta_1^n$ mit $n \geqq 1$. Wäre nun $n > 2$, so folgte $1 < \eta_1 = |\varepsilon_1|^{\frac{2}{n}} < |\varepsilon_1|$, d. h. η_1 wäre eine Einheit aus K von kleinerem Betrage > 1 als ε_1, was unmöglich. Also ist $n = 1$ oder 2.

Ist $n = 2$, so folgt aus $\nu(\varepsilon_1) = |\varepsilon_1|^2 = \eta_1^2$ durch Übergang zu den konjugierten $\bar{\varepsilon}_1$, ε_1', $\bar{\varepsilon}_1'$, daß alle konjugierten der Einheit $\frac{\varepsilon_1}{\eta_1}$ aus K den Betrag 1 haben, daß also $\varepsilon_1 = \zeta\eta_1$ mit einer Einheitswurzel ζ aus K ist, und daß somit η_1 selbst eine Grundeinheit von K ist.

Ist $n = 1$, so folgt aus $\nu(\varepsilon_1) = |\varepsilon_1|^2 = \eta_1$ wie eben, daß $\varepsilon_1^2 = \zeta\eta_1$ mit einer Einheitswurzel ζ aus K, also η_1 zum Quadrat einer Grundeinheit von K adjungiert ist. Sei nun zunächst außer $d \neq i$ auch noch $d \neq 3$ vorausgesetzt. Dann ist $\zeta = i^m$, und es kann durch passende Wahl von ε_1 unter assoziierten $m = 0$ oder 1 angenommen werden. Der Fall $m = 0$ ist unmöglich. Denn dann wäre $\varepsilon_1^2 = \eta_1$ reell-positiv, also ε_1 reell und daher Zahl des reellen Unterkörpers k_1 von K, und somit $\eta_1 = \varepsilon_1^2$ nicht dessen Grundeinheit. Also ist $m = 1$, d. h. $\varepsilon_1^2 = i\eta_1$.
Setzt man nun

$$\varepsilon_1 = \alpha + \beta i \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \text{ aus } k_1,$$

so folgt

$$\varepsilon_1^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = i\eta_1, \text{ also } \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 - \beta^2 = 0, \quad \alpha = \beta \\ 2\alpha\beta = \eta_1 \quad 2\alpha^2 = \eta_1 \end{array} \right\},$$

(letzteres wegen $\eta_1 > 0$). Somit ergibt sich die Hauptidealdarstellung $(2) = \left(\frac{1}{a}\right)^2$ in k_1. Ist umgekehrt $(2) = \left(\frac{1}{a}\right)^2$ mit a aus k_1, so folgt (bei geeigneter Wahl von a) $2a^2 = \eta_1^m$ ($m = 0$ oder 1). Da $d \neq i$, also $d_1 \neq 2$ vorausgesetzt wird, ist $m = 1$, also $2a^2 = \eta_1$. Setzt man dann $\varepsilon = a(1 + i)$, so ist ε eine ganze Zahl aus K und wegen $\nu(\varepsilon) = 2a^2 = \eta_1$ eine Einheit. Es kann daher für die Grundeinheit ε_1 nicht $\nu(\varepsilon_1) = \eta_1^2$ sein, und es liegt somit der Fall $n = 1$ vor, in dem η_1 zum Quadrat von ε_1 adjungiert ist.

Durch den letzten Schluß wird auch der zuvor ausgenommene Fall $d = 3$, also $d_1 = 3$ einbezogen. In der Tat hat man in $k_1 = R(\sqrt{3})$ die Hauptidealdarstellung $(2) = (1 + \sqrt{3})^2$ und daher $n = 1$ [1]). Damit ist Satz 8 bewiesen.

Für den in Satz 1 ausgenommenen Fall $d = i$, d. h. $d_1 = 2$ ist dieser Satz

---

[1]) Es ergibt sich also, daß die Grundeinheit $\eta_1 = 2 + \sqrt{3}$ von $R(\sqrt{3})$ zum Quadrat einer Grundeinheit von $k(\sqrt{3})$ adjungiert ist, wie bei (53) behauptet.

in der Tat unrichtig. Es gilt nämlich, obwohl in $k_1 = R(\sqrt{2})$ die Hauptidealdarstellung $(2) = (\sqrt{2})^2$ besteht:

Satz 9. *Im Körper $K = k(\sqrt{i})$ ist eine Grundeinheit von $k_1 = R(\sqrt{2})$ selbst Grundeinheit* [1]).

Beweis: Es ist zu zeigen, daß der Fall $n = 2$ des vorigen Beweises vorliegt. Wäre $n = 1$, so folgte wie im vorigen Beweis $\varepsilon_1^2 = \iota\eta_1$. Diese Gleichung betrachten wir als Kongruenz nach $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{l} = (1 + i)$, wo $\mathfrak{Q} = (1 - \iota)$ das in 2 zur 4-ten Potenz aufgehende Hauptprimideal von K ist (vgl. (19) a)). Nach (19) a) ist $\Phi_K(\mathfrak{Q}^2) = 2$, also einerseits

$$\varepsilon_1^2 \equiv 1 \text{ mod. } \mathfrak{Q}^2.$$

Andererseits ist

$$\eta_1 = 1 + \sqrt{2} \equiv 1 \text{ mod. } \mathfrak{Q}^2,$$

weil $\sqrt{2}$ (genau) durch $\mathfrak{Q}^2$ teilbar ist. Somit folgte aus obiger Gleichung die Kongruenz $1 \equiv \iota$ mod. $\mathfrak{Q}^2$, die ersichtlich widerspruchsvoll ist. Daher kann nicht $n = 1$ sein.

Durch die Sätze 8 und 9 ist das zur Bestimmung einer Grundeinheit η_1 von k_1 führende gewöhnliche Kettenbruchverfahren für die Bestimmung einer Grundeinheit ε_1 unserer Körper K im Abelschen Falle nutzbar gemacht.

---

[1]) Hiernach ergibt sich also $1 + \sqrt{2}$ als Grundeinheit von $k(\sqrt{i})$, wie bei (52) behauptet.

Potenzreihen irrationalen Grenzwertes.

Von *W. Maier* in Frankfurt (Main).

Einleitung und Übersicht.

Die folgenden Ausführungen sind geteilt in zwei Abschnitte von wesentlich verschiedener Tendenz: Es soll das kurze I. Kapitel methodisch klarlegen, welche Schritte oder Setzungen hier typisch vorzunehmen sind und warum; seine Betrachtungen sind qualitativ und mehr andeutend als durchführend gehalten.

Das längere II. Kapitel spinnt diesen Stoff alsdann deduktiv aus an einer Reihe wohlbekannter analytischer Funktionen, wobei das gleiche Schema paragraphenweise sich wiederholt. Allerdings zwingt die Schwierigkeit der Beweise in §§ 9—11 zu Hilfsbetrachtungen aus ferner liegenden Gebieten, so daß diese drei Schlußparagraphen durch theoretische Einstreuungen ziemlich in die Breite gehen.

Inhaltlich lehnt sich diese Untersuchung an *Hermite* an; methodisch ist sie beeinflußt durch *Hurwitz* und Herrn *Hilbert*. Nennt man „Irrationalitätenanalyse" diejenigen Gedanken, welche die Entscheidung liefern, ob ein vorgegebener rationaler Prozeß, ausgeübt auf rationale Elemente, in der Grenze einen irrationalen Zahlwert erklärt — so möchte das folgende einen bestimmten Bezirk der Irrationalitätenanalyse fördern, denjenigen nämlich, welcher als Erzeugungsprozeß lediglich die Bildung von Potenzreihen verwendet; übrigens müssen die eingehenden Koeffizienten alle rational, die Argumente rational und nicht verschwindend gewählt werden.

Läßt man zur Konkurrenz nur solche analytische Funktionen zu, die schon von verschiedenen Seiten aus verschiedenen Zielsetzungen heraus bearbeitet wurden, so ist das klassische Beispiel einer Irrationalitätenuntersuchung das an der Exponentialfunktion gewonnene Ergebnis (*Hermite*[1]), daß diese für rationale und nicht verschwindende Argumente einen — sogar — transzendenten Zahlwert annimmt. Für Zylinderfunktionen I. Art (*Stridsberg*) und ϑ-Reihen (*Bernstein, Szász, Tschakaloff*) ist wenigstens der Nachweis gewöhnlicher Irrationalität erbracht — sonst aber scheint dies Gebiet wenig bearbeitet worden zu sein.

Die folgenden §§ 1—10 sprechen gewöhnliche Irrationalität aus für mehrere wohlbekannte analytische Funktionen; der § 11 zeigt, daß gewisse Werte von Zylinderfunktionen sogar mindestens kubisch irrational ausfallen[2]).

I. Kapitel: Theoretische Grundlagen.

§ 1. Bezeichnungen.

Die folgenden Benennungen sind in §§ 1—11 festgehalten; es bedeutet immer das abkürzende Zeichen

$$(1)\quad \begin{cases} p & \text{eine Primzahl} & 2, 3, 5, 7, 11, \ldots \\ V, g, m, n, \tau & \text{eine positive ganze Zahl} & 1, 2, 3, \ldots \\ \lambda, \mu, \nu & \text{einen nicht negativen ganzen Summationszeiger} & 0, 1, 2, \ldots \\ \sigma, \sigma_1, \sigma_2 & \text{eine nicht verschwindende ganze Zahl} & \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \\ H, g_\mu, S & \text{eine ganze Zahl.} & \end{cases}$$

[1]) Vgl. die Literaturangabe am Schluß von § 11.

[2]) *Anmerkung bei der Korrektur*: Von anderer Seite wurde inzwischen entsprechend ein Transzendenzsatz für Zylinderfunktionen gegeben.

Abkürzend schreibe man die Quotienten

$$(2) \qquad \frac{\sigma}{\tau} = q, \qquad \frac{\sigma_1}{\tau} = q_1, \qquad \frac{\sigma_2}{\tau} = q_2 .$$

Für beliebig rationale Zahlen r und s benötigt man das arithmetische Symbol der Kongruenz:

$$r \equiv s \quad (m),$$

gelesen: r ist gleichrestig mit s nach dem Teiler m, oder kürzer: r kongruent s nach m; dies bedeutet, daß $\frac{r-s}{m}$ ganz ist. Insbesondere gilt nach (1)

$$p \equiv \cdots \equiv S \equiv 0 \quad (1).$$

Durch die *Gauß*sche Ganzzahligkeitsklammer wird für jedes reelle h mit

$$[h] = g$$

die größte ganze Zahl g angesprochen, welche h nicht übertrifft; umgekehrt werden wir durch eckige Umklammerung die Ganzzahligkeit einer Größe betonen. Durch

$$\{\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots\} = V$$

werde das kleinste gemeinsame Vielfache von $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ bezeichnet; dieses ist bestimmt als kleinste positive Lösung des Kongruenzensystems

$$\frac{V}{\sigma} \equiv \frac{V}{\sigma_1} \equiv \frac{V}{\sigma_2} \equiv \cdots \equiv 0 \quad (1).$$

Der reellen Analysis entnehmen wir folgende Begriffe: mit $-\infty < x < \infty$; $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ Polynome, wovon $\chi(x)$ nicht identisch verschwinde, bedeute die algebraische Kongruenz

$$\varphi \equiv \psi \mod. \chi,$$

daß $\frac{\varphi - \psi}{\chi}$ Polynom in x ist; gesprochen: φ kongruent ψ modulo χ; insbesondere zieht die algebraische Kongruenz

$$\varphi(x) \equiv 0 \mod. (\sigma - \tau x)$$

die numerische Gleichung nach sich:

$$\varphi\left(\frac{\sigma}{\tau}\right) = 0 .$$

Auch y, v, u durchlaufen alle reellen Werte, abgesehen von § 11, wo u vorübergehend komplex ist; (xy) wirkt oft als *eine* Veränderliche.

$\xi(x)$ bedeute eine Potenzreihe in x, deren Konvergenzhalbmesser die Einheit nicht unterschreite, deren niederster Koeffizient rational ist und die formal einer gewissen linearen Differentialgleichung genügt.

Durch griechische und lateinische Buchstaben werden Funktionen und Zahlen charakterisiert; durch die deutschen Zeichen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ sollen Operationssymbole gegeben werden. $\mathfrak{D}$ bedeutet einfache Differentiation, $\mathfrak{D}^n$ die n-te Ableitung; bei mehreren Veränderlichen wird der unterscheidende Zeiger angehängt:

$\mathfrak{D}_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathfrak{D}_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; wir erklären $\mathfrak{D}_x^{-1} = \int_0^x dx$ als „zu $\mathfrak{D}_x$ inverse Operation". (Obwohl nicht immer $\mathfrak{D}_x^{-1}\mathfrak{D}_x\varphi(x) = \varphi(x)$ ist; etwa für $\varphi(x) = kx^{-\nu}$.

Zusammengesetzte Operatoren werden grundsätzlich linksseitig aufgebaut; so ist in

$$\mathfrak{T}_{xy}^2 = \{\mathfrak{D}_x^{-1} x\, \mathfrak{D}_y^3\}^2 = \mathfrak{D}_x^{-1} x\, \mathfrak{D}_y^3\, \mathfrak{D}_x^{-1} x\, \mathfrak{D}_y^3 \tag{3}$$

zuerst die nachstehende Funktion nach y abzuleiten und zuletzt von 0 bis x zu integrieren.

Es sei weiter der zu (3) „inverse Operator" erklärt durch

$$\mathfrak{T}_{xy}^{-2} = \{\mathfrak{D}_y^{-3} x^{-1}\, \mathfrak{D}_x\}^2; \tag{3'}$$

dabei wurden allgemein die in (3) eingehenden Multiplikationen und Differentiationen invertiert und dann in umgekehrter Reihenfolge angeschrieben. — Über $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ vgl. § 11.

Zur Abkürzung werde die in den Beweisen häufige Wendung: „ohne Beschränkung der Allgemeinheit" als: „o. B." geschrieben.

Eine Berufung auf § 1 Gleichung (3) wird systematisch gekürzt durch unterscheidende Zifferngröße; hier also durch 1. 3.

§ 2. Näherungsformen.

Die Theorie der Kettenbrüche lehrt, daß zu jedem reellen Zahlpaar ξ, $\bar{S}' > 0$ ein Paar ganzer Zahlen existiert: $H', S' > \bar{S}'$, wobei jeweils ξ durch den Bruch $\frac{H'}{S'}$ so approximiert wird, daß

$$|S'\xi - H'| < \frac{1}{2S'}$$

gilt. Neben diesen sehr scharfen Näherungen für ξ erhält man noch weitere, wenn bei vorgegebenem ξ und g nur die schwächere Bedingung erfüllt sein soll:

$$|S\xi - H| < \frac{1}{g}. \tag{1}$$

Allein mit solchen relativ plumpen Näherungen (1) für ξ hat diese Untersuchung sich zu befassen; soll sie trotzdem Ergebnisse zeitigen, so muß sie über die Kettenbruchtheorie hinaus die wirkliche Herstellung (und nicht nur den Existenzbeweis) von

$$S = S(\xi, g) \quad \text{und} \quad H = H(\xi, g) \tag{2}$$

leisten, derart, daß z. B. gewisse Teiler von S und H in Erscheinung treten, oder daß die linke Seite von (1) auch nach unten hinreichend scharf geschätzt werden kann. Allgemein werde $S\xi - H$ als „Näherungsform für ξ" bezeichnet. Herstellung und Beherrschung von Näherungsformen steht in naher Beziehung zur Entscheidbarkeit der Frage, ob ξ rationalwertig ist oder irrational: ein kennzeichnendes Merkmal der rationalen Zahlen ξ nämlich besteht darin, daß dann ein $\bar{g} = \bar{g}(\xi)$

gefunden werden kann, für welches jeweils aus

$$|S\xi - H|\,\bar{g} < 1$$

die schärfere Folge fließt:

$$(1') \qquad S\xi - H = 0.$$

In diesem Fall sowie bei den beiden trivialen Kombinationen $S = H = 0$ oder $\xi = H = 0$ sprechen wir von einer „uneigentlichen" Näherungsform für ξ; umgekehrt können bei irrationalem ξ beliebig viele Zahlpaare (2) beschafft werden, (und insbesondere solche mit $S > S_0$), für die (1) sich vervollständigt zur Doppelschätzung:

$$(1'') \qquad 0 < |S\xi - H| < \frac{1}{g}.$$

Bei (1'') reden wir von einer „eigentlichen" Näherungsform für ξ; falls eine solche existiert, und zwar für jedes endliche g, so ist damit die Irrationalität von ξ erwiesen.

Sei nun konvergent entwickelbar

$$(3) \qquad \xi = \sum_0^\infty{}^{\nu} u_\nu,$$

so bilde man die Abschnitte

$$\xi_n = \sum_0^n{}^{\nu} u_\nu,$$

dann strebt für jedes feste s und $n \to \infty$ die Differenz $s\xi - s\xi_n \to 0$; läßt man aber s von n abhängen vermöge der Angaben

$$(4) \qquad u_\nu = \frac{a_\nu}{c_\nu} q^\nu, \quad 0 < c_\nu \equiv a_\nu \equiv 0 \ (1) \qquad \text{und mit } 1.1.2$$

$$(5) \qquad s = \tau^n \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$$

und setzt dann $s\xi_n = h$, so wird

$$s \equiv 0 \ (1), \qquad h = \sum_0^n{}^{\nu} a_\nu \sigma^\nu \tau^{n-\nu} \left[\frac{\{c_0, \ldots, c_n\}}{c_\nu}\right] \equiv 0 \ (1) \qquad \text{und}$$

$$(6) \qquad s\xi - h = s \sum_{n+1}^\infty{}^{\nu} u_\nu \ ;$$

dann darf weder τ noch $\{c_0, \ldots, c_n\}$ noch $|\xi - \xi_n|$ allzugroß bleiben, falls durch (6) eine Näherungsform für ξ gegeben sein soll.

Beispiel: $a_\nu = 1$, $c_\nu = \nu!$. Nach (3)—(6) wird

$$s\xi - h = \sigma^n \sum_1^\infty{}^{\lambda} \frac{q^\lambda}{(n+1)\cdots(n+\lambda)} \qquad \text{und für } n > n_0(q)$$

$$|se^q - h| < \frac{2}{n}|\sigma|^n \qquad \text{und für } n_0 > 2g$$

$$|se^q - h| < \frac{1}{g} \text{ nur, falls } |\sigma| = 1, \text{ d. h. } \pm q = \frac{1}{\tau} \text{ ist;}$$

für jedes andere rationale q erhalten wir so keine Näherungsform!

Der obige Versuch, Näherungsformen zu bilden, war zu eng; wir verwerfen ihn zugunsten einer ähnlichen aber weitertragenden Methode: $m+1$ verschiedene Näherungsformen (6) werden „gemischt", d. h. man nimmt zwischen ihnen geeignete Mittelwertsbildungen vor. Für $\mu = 0, \ldots, m$ wähle man „Gewichte" g_μ, die nicht sämtlich verschwinden, und erhält nach (3)

$$\xi \sum_0^m{}^{\mu} g_\mu = \sum_0^m{}^{\mu} g_\mu \sum_0^\infty{}^{\nu} u_\nu$$

und mit $g_{-1-\lambda} = 0$ für $\lambda = 0, 1, \ldots$ nach Umstellung

$$\xi \sum_0^m{}^{\mu} g_\mu = \sum_0^\infty{}^{\nu} \sum_{m-\nu}^m{}^{\mu} g_\mu u_{\mu+\nu-m}. \tag{7}$$

Zur Abkürzung setze man

$$\sum_0^m{}^{\mu} g_\mu = S, \qquad \text{wobei} \qquad \sum_0^m{}^{\mu} g_\mu^2 > 0, \tag{5'}$$

$$\sum_{m-\nu}^m{}^{\mu} g_\mu u_{\mu+\nu-m} = S_\nu \left(= \sum_0^m{}^{\mu} g_\mu u_{\mu+\nu-m}\right) \qquad \text{mit der Nebenbedingung } m-1 < \mu+\nu), \tag{8}$$

$$\sum_0^n{}^{\nu} S_\nu = H, \qquad \text{wenn } \textit{nur} \text{ für } \nu < n+1 \quad S_\nu \equiv 0 \ (1) \quad \text{besteht („Hauptteil"),} \tag{5''}$$

$$\sum_{n+1}^\infty{}^{\nu} S_\nu = R \qquad (\text{„Rest" der Doppelreihe}); \tag{9}$$

dann führt (7) zu

$$S\xi - H = R. \tag{6'}$$

Die g_μ sollen so normiert sein, daß der durch (5'') bestimmte Zeiger n der Ungleichung

$$\frac{11}{10} m < n \tag{10}$$

genügt; möglicherweise besteht dann ein *Gemeinteiler* zwischen $g_0, \ldots, g_m$ über dessen Größe wir gegenwärtig noch nichts wissen.

Zur Ergänzung von (3) bestimme man mit rationalen b_ν, die vorgegeben seien,

$$u_\nu = u_\nu(q) = b_\nu q^\nu. \tag{4'}$$

Dann ist nach (8), (10)

$$S_n = S_n(q) = \sum_0^m{}^{\mu} g_\mu u_{\mu+n-m}(q), \tag{11}$$

und mit *stetigem* x wird durch

$$S_n(x) = \sum_0^m{}^{\mu} g_\mu u_{\mu+n-m}(x) \tag{11'}$$

die Gesamtheit der $m+1$ Konstanten g_μ festgelegt und umgekehrt. Diese Umkehrung der Gedankenfolge greife man auf, und betrachte primär das $(m+1)$-gliedrige Polynom $S_n(x)$: Wie muß dieses gestaltet werden, daß die rechte Seite

von (6′) für $n \to \infty$ gegen Null strebt? Nicht durch Kleinheit der $|g_\mu|$, sondern durch geschickte gegenseitige Abgleichung derselben suche man zu erreichen, daß in (9)

$$(9') \qquad |R| = |R(g_\mu, q)| < \frac{1}{g}$$

bleibe, und dies würde aus Konvergenzgründen für $m > m_0(g, q)$ z. B. durch das *Verschwinden hinreichend vieler* S_ν aus (5″) erreicht werden, etwa durch die Forderung

$$\sum_{100}^{n_\nu} S_\nu(q) = 0 .$$

§ 3. Lineare Gleichungssysteme.

Die letzte Forderung war in bezug auf die untere Summationsgrenze willkürlich und übertrieben. Auch wenn diese nicht fest, sondern mit m und n wachsend vorausgesetzt würde, könnte doch in vielen Fällen $|R|$ viel kleiner ausfallen nicht nur als $|H|$, sondern selbst als der Absolutwert eines jeden seiner Summanden in (5″) und (8). Indem man 2.10 *verschärft* zu

$$(1) \qquad m = 3l + 1, \quad n > 4l, \quad l = 2, 3, \ldots$$

soll zunächst für gewisse $\xi(q)$ die „Aussparung" erzielt werden:

$$(2) \qquad \sum_{n-l}^{n_\nu} S_\nu(q) = 0,$$

und diese geringere Forderung wird im wesentlichen die g_μ festlegen.

Für $i = 1, 2, \ldots, 5$ seien rational die Werte

$$(1') \qquad \varkappa_i \neq 0, 1, 2, \ldots;$$

aus

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{T}_1 = x^{\varkappa_1 - \varkappa_3} \mathfrak{D}_x x^{1+\varkappa_2-\varkappa_1} \mathfrak{D}_x x^{-\varkappa_2} \\ \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{D}_x x^{1+\varkappa_4-\varkappa_3} \mathfrak{D}_x x^{1+\varkappa_5-\varkappa_4} \mathfrak{D}_x x^{-1-\varkappa_5} \end{array} \right\}$$

bilde man die lineare Differentialgleichung für $\xi(x) = \xi$:

$$(4) \qquad \mathfrak{T}_1 \xi - \mathfrak{T}_2 \xi = (1 + \varkappa_3)(1 + \varkappa_4)(1 + \varkappa_5)\, x^{-2-\varkappa_3}$$

mit der Anfangsbedingung $\xi(0) = 1$; dann folgt aus 2.4′ und der Eindeutigkeit der Entwickelung

$$(5) \qquad \xi(x) = \sum_{0}^{\infty_\nu} b_\nu x^\nu :$$

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} b_0 = 1 \\ b_\nu = \prod_{0}^{\nu-1_\varrho} \dfrac{(\varrho - \varkappa_1)(\varrho - \varkappa_2)}{(\varrho - \varkappa_3)(\varrho - \varkappa_4)(\varrho - \varkappa_5)} \end{array} \right\}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots$

Diese Potenzreihen (5), (6) umfassen die im II. Kapitel ausgeführten Beispiele sämtlich als Spezial- oder Grenzfälle mit

$$\sum_1^5{}^i \varkappa_i^2 \to \infty, \left| \frac{\varkappa_1 \varkappa_2 x}{\varkappa_3 \varkappa_4 \varkappa_5} \right| < k .$$

Die strenge Durchführung der Grenzübergänge vom gegenwärtigen allgemeinen Ansatz aus erscheint jedoch umständlicher, als die direkte Durchführung des jeweils spezialisierten Problems. Für solche $\xi(x)$ wird statt (2) sogar genauer gezeigt, daß für $\lambda = 0, 1, \ldots, l$:

$$S_{n-\lambda}(q) = 0 \tag{2'}$$

gilt; möglich ist dies, weil die Operatoren (3) die Polynome $S_{n-\lambda}(x)$ verbinden. Da jedoch

$$\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 u_\nu(x) \neq \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_1 u_\nu(x),$$

scheint der Formelapparat unserer nichtkommutativen Operatoren reichlich schwerfällig zu werden; wir entlasten ihn durch Einführung einer weiteren Veränderlichen y und legen statt (5) die Reihe

$$\xi(xy) = \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu (xy)^\nu \tag{5'}$$

zugrunde. Dann geben die „partiellen" Operatoren in x und y:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{T}_x = x^{2+\varkappa_1} \mathfrak{D}_x x^{1+\varkappa_2-\varkappa_1} \mathfrak{D}_x x^{-\varkappa_2} \\ \mathfrak{T}_y = y^{1+\varkappa_3} \mathfrak{D}_y y^{1-\varkappa_3+\varkappa_4} \mathfrak{D}_y y^{1-\varkappa_4+\varkappa_5} \mathfrak{D}_y y^{-1-\varkappa_5} \end{array} \right\} \tag{3'}$$

nach (6) und 2.4′ für $\nu = 0, 1, \ldots$

$$\mathfrak{T}_x u_\nu(xy) = \mathfrak{T}_y u_{\nu+1}(xy); \tag{7}$$

bildet man nach 1.3 den zu $\mathfrak{T}_x$ inversen Operator

$$\mathfrak{T}_x^{-1} = x^{\varkappa_2} \mathfrak{D}_x^{-1} x^{-1+\varkappa_1-\varkappa_2} \mathfrak{D}_x^{-1} x^{-2-\varkappa_1}, \tag{3''}$$

so folgt aus (7) für $\nu > \varkappa_1, \varkappa_2$

$$u_\nu(xy) = \mathfrak{T}_x^{-1} \mathfrak{T}_y u_{\nu+1}(xy). \tag{7'}$$

Im Gegensatz zu den „gewöhnlichen" Operatoren (3) sind in (3′, 3″) vertauschbar:

$$\mathfrak{T}_x \mathfrak{T}_y = \mathfrak{T}_y \mathfrak{T}_x \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}_x^{-1} \mathfrak{T}_y = \mathfrak{T}_y \mathfrak{T}_x^{-1};$$

somit

$$u_\nu(xy) = \{\mathfrak{T}_x^{-1} \mathfrak{T}_y\} u_{\nu+1}(xy) = \{\mathfrak{T}_y \mathfrak{T}_x^{-1}\} u_{\nu+1}(xy).$$

Alle Komponenten sind assoziativ, also

$$u_\nu(x\,y) = \mathfrak{T}_y^\lambda \mathfrak{T}_x^{-\lambda} u_{\nu+\lambda}(x\,y). \tag{7''}$$

Weiter ist der in (7″) eingehende Operator wie seine Elemente (3′, 3″) „linear", d. h. es gilt die Rechenregel für $\lambda, \mu = 0, 1, \ldots$

$$\mathfrak{T}_y^\lambda \mathfrak{T}_x^{-\lambda} \{u_{\nu+\lambda}(xy) + u_{\nu+\mu}(xy)\} = \mathfrak{T}_y^\lambda \mathfrak{T}_x^{-\lambda} u_{\nu+\lambda}(xy) + \mathfrak{T}_y^\lambda \mathfrak{T}_x^{-\lambda} u_{\nu+\mu}(x\,y), \tag{7'''}$$

und so zeigt (7″) mit 2.8 und 2.11′ für $\lambda = 0, 1, \ldots, l$:

$$S_{n-\lambda}(xy) = \sum_0^m{}^\mu g_\mu u_{\mu+n-m-\lambda}(xy) \qquad \text{und speziell für } \varkappa_1, \varkappa_2 < 0 \tag{2''}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_0^m{}_\mu\, g_\mu\, \mathfrak{T}_y^\lambda \mathfrak{T}_x^{-\lambda}\, u_{\mu+n-m}(xy) \\
(2'') \qquad &= \mathfrak{T}_y^\lambda \mathfrak{T}_x^{-\lambda} \sum_0^m{}_\mu\, g_\mu\, u_{\mu+n-m}(xy) \\
&= \mathfrak{T}_y^\lambda \mathfrak{T}_x^{-\lambda} S_n(xy)\,.
\end{aligned}
$$

Endlich gilt nach 1. 1. 3 und 3. 3′ für $\lambda < \mu + 1$

$$
(8) \qquad \mathfrak{T}_x^\mu \mathfrak{T}_x^{-\lambda}\, u_{\mu+\nu}(xy) = \mathfrak{T}_x^{\mu-\lambda}\, u_{\mu+\nu}(xy)\,;
$$

(für $\left\{\begin{matrix} \nu = \varkappa_2 = 0 \\ \mu < \lambda \end{matrix}\right\}$ wäre das unrichtig!).

Dann erkläre man mit $\dfrac{\partial k}{\partial x} = \dfrac{\partial k}{\partial y} = 0$ und (1) das Polynom 2. 11′ durch

$$
(9) \qquad S_n(xy) = k\{y\mathfrak{T}_x\}^l (\sigma - \tau xy)^{3l+1} (xy)^{n-4l-1},
$$

so wird nach (2″) und (8), welches für unseren Fall die Selbstvernichtung der inversen Komponenten $\mathfrak{T}_x^{\pm\lambda}$ ausspricht,

$$
\begin{aligned}
(2''') \qquad S_{n-\lambda}(xy) &= \mathfrak{T}_y^\lambda \mathfrak{T}_x^{-\lambda} \cdot k\{y\mathfrak{T}_x\}^l (\sigma - \tau xy)^{3l+1} (xy)^{n-4l-1} \\
&= k \cdot \mathfrak{T}_y^\lambda \mathfrak{T}_x^{l-\lambda} (\sigma - \tau xy)^{3l+1} x^{n-4l-1} y^{n-3l-1}.
\end{aligned}
$$

Es ist nötig, in zwei Hilfssätzen die Einwirkung der Operatoren (3′) auf die Faktorenzerlegung einer dahinterstehenden Funktion zu schildern:

Hilfss. 1. Vor.: $d = 1, 2, \ldots$; Polynom $\varphi(x) \equiv 0$ mod. $(\sigma - \tau x)^d$.
Beh.: $\varphi'(x) \equiv 0$ mod. $(\sigma - \tau x)^{d-1}$.
Bew.: Vgl. etwa *Cesaro*: „Algebraische Analysis", § 450.

Hilfss. 2. Vor.: $\lambda = 0, \ldots, l$; $\psi(y)$ Polynom; $\mathfrak{T}_y$ aus (3′) erklärt.
Beh.: $\mathfrak{T}_y^\lambda (\sigma - \tau xy)^{3l+1} \psi(y) \equiv 0$ mod. $(\sigma - \tau xy)^{1+3l-3\lambda}$.
Bew.: Durch λ-malige Anwendung von Hilfss. 1 auf die Veränderliche y wird der Vielfachheitsgrad der Nullstelle $y = \dfrac{\sigma}{\tau x}$ des Polynoms linkerhand schrittweise um 3λ Einheiten gesenkt.

Betrachtet man die hinter den Operatoren stehende Funktion in (2‴) als Polynom von y, und wendet Hilfss. 2 an; betrachtet das entstandene Gebilde als Polynom in x, und verfolgt die Senkung des Grades der eingehenden Vielfachwurzel $x = \dfrac{\sigma}{\tau y}$ durch den Operator $\mathfrak{T}_x^{(l-\lambda)}$ vermöge Hilfss. 2, so folgt

$$
\begin{aligned}
S_{n-\lambda}(xy) &= k\, \mathfrak{T}_y^\lambda \mathfrak{T}_x^{l-\lambda} (\sigma - \tau xy)^{3l+1} x^{n-4l-1} y^{n-3l-1} \\
&\equiv 0 \text{ mod. } (\sigma - \tau xy)^{3l+1-3\lambda-2(l-\lambda)} \\
&\equiv 0 \text{ mod. } (\sigma - \tau xy); \qquad \text{insbesondere (2′) und (2).}
\end{aligned}
$$

Der Ansatz (9) ist also geeignet, in unserem Fall der Koeffizienten b_ν, wie sie aus (6) folgen, das System linearer Gleichungen (2′) für die „Gewichte" g_μ zu befriedigen.

Um explizite $g_\mu = g_\mu(k, \sigma, \tau, \varkappa_i)$ darzustellen, entwickle man (9)

$$S_n(xy) = k\,\mathfrak{T}_x^l x^{n-4l-1} y^{n-3l-1}(\sigma - \tau xy)^{3l+1}$$

nach (3′) und binom. Satz:

$$= k\{x^{2+\varkappa_1}\mathfrak{D}_x x^{1+\varkappa_2-\varkappa_1}\mathfrak{D}_x x^{-\varkappa_2}\}^l x^{n-4l-1} y^{n-3l-1} \sum_0^{3l+1\mu} \binom{3l+1}{\mu} \sigma^{3l+1-\mu}(-\tau xy)^\mu$$

$$= k \sum_0^{3l+1\mu} \binom{3l+1}{\mu} \sigma^{3l+1-\mu}(-\tau)^\mu y^{\mu+n-3l-1} \{x^{2+\varkappa_1}\mathfrak{D}_x x^{1+\varkappa_2-\varkappa_1}\mathfrak{D}_x x^{-\varkappa_2}\}^l x^{\mu+n-4l-1} \tag{9′}$$

$$= k \sum_0^{3l+1\mu} \binom{3l+1}{\mu} \sigma^{3l+1-\mu}(-\tau)^\mu (xy)^{\mu+n-3l-1} \prod_{\mu+n-4l-1}^{\mu+n-3l-2\varrho} (\varrho - \varkappa_1)(\varrho - \varkappa_2).$$

Zur Kürzung sei

$$\left.\begin{aligned} \prod_0^{\nu-1\varrho} (\varrho - \varkappa_1)(\varrho - \varkappa_2) &= A_\nu \\ \prod_0^{\nu-1\varrho} (\varrho - \varkappa_3)(\varrho - \varkappa_4)(\varrho - \varkappa_5) &= C_\nu \end{aligned}\right\} \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots \text{ und } A_0 = C_0 = 1,$$

so wird nach 2. 8 und 3. 6

$$S_n(xy) = \sum_0^{3l+1\mu} g_\mu\, u_{\mu+n-3l-1}(xy)$$

$$= \sum_0^{3l+1\mu} (xy)^{\mu+n-3l-1} g_\mu\, b_{\mu+n-3l-1}$$

$$= \sum_0^{3l+1\mu} (xy)^{\mu+n-3l-1} g_\mu \frac{A_{\mu+n-3l-1}}{C_{\mu+n-3l-1}}.$$

Vergleich mit (9′) zeigt für $\mu = 0, \ldots, 3l+1$:

$$g_\mu = k \binom{3l+1}{\mu} \sigma^{3l+1-\mu}(-\tau)^\mu \frac{C_{\mu+n-3l-1}}{A_{\mu+n-4l-1}}, \tag{10}$$

wodurch das Verhältnis je zweier g_μ zueinander festgelegt ist.

Übrigens kann für ganze $\varkappa_i$, wie in 7. 20 ff., das $S_{n-\lambda}(xy)$ von (2″) weniger Summanden enthalten als $S_n(xy)$; λ kann dann etwas allgemeiner gewählt werden als oben bei (2″).

Noch einen Blick auf die schon berührten Grenzfälle, z. B.

$$|\varkappa_5| \to \infty; \quad x = \varkappa_5 z \quad \text{mit} \quad 0 < z^2 < 1.$$

Dann wird (4) eine lineare homogene Differentialgleichung II. Ordnung, (5) eine hypergeometrische Reihe allgemeiner Art, die für $\varkappa_4 \equiv 0\,(1)$ zu einer *Gauß*schen Reihe werden kann. Beide Operatoren (3′) enthalten jetzt nur noch je 2 Differentiationen, so daß in (9) und Hilfss. 2 der Exponent $2l+1$ statt $3l+1$ ausreichen würde, um (2) zu erfüllen, und in (1) $m = 2l+1$ gewählt werden dürfte.

Insbesondere geht die beständige Konvergenz der Potenzreihe (5) verloren; daher wird die Aussparung (2) aus 2. 7 nicht mehr so radikale Unterschiede schaffen können zwischen

$$\text{Hauptteil } |H| \text{ und Rest } |R|.$$

§ 4. Approximation durch Aussparung.

Es bewirkten die Gewichte 3. 10 die Aussparung 3. 2 aus dem Hauptteil 2. 5″, welcher sich jetzt zusammenzieht auf $n-l$ Spalten:

$$H = \sum_{0}^{n-l-1}{}^{\nu} S_\nu, \qquad \text{nach 2. 5″ und 3. 1}$$

$$= \sum_{0}^{m}{}^{\mu} g_\mu \sum_{m-\mu}^{n-l-1}{}^{\nu} u_{\mu+\nu-m} \qquad \text{und nach 3. 10}$$

$$= \sum_{0}^{m}{}^{\mu} k \binom{m}{\mu} \sigma^{m-\mu}(-\tau)^\mu \sum_{m-\mu}^{n-l-1}{}^{\nu} q^{\mu+\nu-m} \frac{A_{\mu+\nu-m}}{C_{\mu+\nu-m}} \frac{C_{\mu+n-m}}{A_{\mu+n-m-l}}$$

$$(1) \quad = k \sum_{0}^{m}{}^{\mu} (-1)^\mu \binom{m}{\mu} \sum_{m-\mu}^{n-l-1}{}^{\nu} \sigma^\nu \tau^{m-\nu} \prod_{\mu+\nu-m}^{\mu+n-m-1}{}_{\varrho} (\varrho-\varkappa_3)(\varrho-\varkappa_4)(\varrho-\varkappa_5) \prod_{\mu+\nu-m}^{\mu-m+n-l-1}{}_{\varrho} \frac{1}{(\varrho-\varkappa_1)(\varrho-\varkappa_2)}.$$

Ergänzen wir 3. 1 durch

$$(2) \qquad n < 2m$$

und verstehen unter

$$(2') \qquad C(\varkappa_i) = C$$

eine von m freie Zahl, so sei hier ein Ergebnis des II. Kapitels vorweggenommen, dessen Begründung erst durch den arithmetischen Hilfss. 8 möglich ist:

Mit 1. 1 und 4. 2. 2′ genügt nämlich die kleinste in 3. 10 und 4. 1 eingehende positive Zahl k den Ungleichungen

$$(3) \qquad 0 < k\,(m!) < C^m.$$

Damit wird der Rest 2. 9 abgeschätzt werden können, und es muß sich entscheiden, ob 2. 9′ erfüllbar ist, so daß 2. 6′ wirklich zur Näherungsform geworden ist. Die Abschätzung von R geschieht durch Majorisierung seiner Zeilen mittels der Exponentialreihe. Nach 2. 9 ist

$$|R| \leqq \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} |S_\nu| \qquad \text{und nach 2. 8 und 3. 5}$$

$$\leqq \sum_{0}^{m}{}^{\mu} |g_\mu| \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} |b_{\mu+\nu-m}|\,|q^{\mu+\nu-m}|$$

$$= \sum_{0}^{m}{}^{\mu} |g_\mu\, q^{\mu+n+1-m}| \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} |b_{\mu+\nu-m}|\,|q^{\nu-n-1}|$$

$$= \sum_{0}^{m}{}^{\mu} \left|\frac{g_\mu q^{\mu+n+1-m}}{(\mu+n+1-m)!}\right| \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} |b_{\mu+\nu-m}\cdot(\mu+n+1-m)!\, q^{\nu-n-1}|,$$

nach 3. 6

$$< \sum_{0}^{m}{}^{\mu} \left|\frac{g_\mu q^{\mu+n+1-m}}{(\mu+n+1-m)!}\right| \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} |b_{\mu+n+1-m}\cdot(\mu+n+1-m)!| \frac{|2q|^{\nu-n-1}}{(\nu-n-1)!}$$

$$\cdot \left| \prod_{\mu+n+1-m}^{\mu+\nu-1-m}{}_{\varrho} \frac{\varrho(\varrho-\varkappa_1)(\varrho-\varkappa_2)}{2(\varrho-\varkappa_3)(\varrho-\varkappa_4)(\varrho-\varkappa_5)} \right|, \quad \text{für } m > m_0(\varkappa_i) \text{ mit } c_j(\varkappa_i) = c_j$$

$$< e^{2|q|}\, l^{c_1} \sum_0^m{}_\mu \left| \frac{g_\mu\, q^{\mu+n+1-m}}{(\mu+n+1-m)!} \right| \qquad \text{und nach 3. 10}$$

$$< e^{2|\sigma|}\, m^{c_1} |\sigma|^{n+1}\, k \sum_0^m{}_\mu \binom{m}{\mu} \left| \frac{C_{\mu+n-m}}{A_{\mu+n-m-l}} \right| \frac{1}{(\mu+n+1-m)!} \qquad \text{und für } m_0 > m_1(c_j, \varkappa_i, g)$$

$$< c_2^m\, k \sum_0^m{}_\mu \binom{m}{\mu} \left| \frac{C_{\mu+n-m}}{A_{\mu+n-m} \cdot (\mu+n+1-m)!} \right| \left| \frac{A_{\mu+n-m}}{A_{\mu+n-m-l}} \right|$$

$$(4) \qquad = c_2^m\, k \sum_0^m{}_\mu \binom{m}{\mu} \prod_0^{\mu+n-m-1}{}_\varrho \left| \frac{(\varrho-\varkappa_3)(\varrho-\varkappa_4)(\varrho-\varkappa_5)}{(\varrho-\varkappa_1)(\varrho-\varkappa_2)(\varrho+2)} \right| \left| \prod_{\mu+n-m-l}^{\mu+n-m-1}{}_\varrho (\varrho-\varkappa_1)(\varrho-\varkappa_2) \right|$$

und nach Abspaltung endlich vieler Faktoren aus dem Zähler des ersten Produkts

$$< c_2^m\, k \sum_0^m{}_\mu \binom{m}{\mu} m^{c_2}\, c_4^m\, (l!)^2$$

$$< c_5^m \frac{(l!)^2}{m!} \qquad \text{und mit wachsendem } m \text{ zuletzt}$$

$$< \frac{1}{g}\,.$$

Für jedes q aus 1. 2 erhalten wir nach 4. 2. 3. 4 für ξ eine Näherungsform

$$S\xi - H = R\,;$$

für die mehrfach erwähnten Grenzfälle, etwa $|\varkappa_5| \to \infty$ usw., muß die Abschätzung 4. 4 entsprechend der Konvergenzverschlechterung von $\xi(x)$ nicht mit der Exponential- — sondern der geometrischen Reihe als Majorante ausgeführt werden. Wie in 3. 11 angedeutet, wird die Kleinheit von $|R|$, die wir brauchen, nicht für jedes q eintreten, vielmehr wird Irrationalität nachweisbar erst bei Gültigkeit gewisser Beziehungen zwischen σ und τ, ein Tatbestand der bei Binomialreihen gebrochener Exponenten z. B. die Schranken unseres Verfahrens klar macht.

Das in den §§ 1—4 angedeutete Beweisschema kehrt wieder bei jedem Irrationalitätssatz des II. Kap.; vom nächsten § 5 ab ist die Methode verzweigt.

Insbesondere kommen neue Gesichtspunkte in Betracht für den Nachweis höherer Irrationalität, wie er in § 11 an Zylinderfunktionen I. Art erbracht wird. Dort sind statt des einen Gleichungssystems deren zwei zu erfüllen

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{1,8m-\lambda}(q) = 0 \\ S_{2,8m-\lambda}(q) = 0 \end{array} \right\} \qquad \lambda = 1, \ldots, m\,.$$

Deren Herstellung einzeln ist durch § 3 wohl vorbereitet; ihre simultane Behandlung bietet besondere neue Schwierigkeiten, indem zwischen beiden gewisse Zusammenhänge bestehen müssen.

§ 5. Restschätzung nach unten.

Im Sinne des § 2 ist durch die obigen Angaben für ξ eine Näherungsform konstruiert worden. Alles kommt jetzt darauf an zu erkennen, wann dies eine „eigentliche“ ist; es gilt also, anstatt

$$(1) \qquad |R| < \frac{1}{g}$$

für vorgegebenes beliebig großes g die doppelte Ungleichung als gültig zu zeigen:

$$0 < |R| < \frac{1}{g}. \tag{2}$$

Nach 2.1″ folgt daraus unmittelbar die Irrationalität von ξ.

Zwei Wege sind gangbar: Wenn möglich, bestimmen wir unmittelbar nach 2.8.9 untere Schranken für den Rest $|R|$, wozu feinere Schätzungen vonnöten sind als die grobe Majorantenmethode des § 5; unter Zuziehung *Euler*scher Integrale wird es gelingen, die Polynome 2.8 in geschlossener Form darzustellen, und sogar die Summation über ν gibt in einigen Fällen durchsichtige Ausdrücke für R. Zweck dieser Darstellung ist aber, das Nichtverschwinden von R zu erkennen oder wie wir sagen werden, R „definit" zu gestalten, d. h. als Summe (Integral) von Elementen gleichen Vorzeichens darzustellen; erreicht wird dies Ziel durch geeignete Teilintegrationen.

Beschränken wir uns auf die Grenzfälle $\left\{\begin{matrix}|x_1| \to \infty \\ |x_2| \to \infty\end{matrix}\right\}$, so führt ein elementares und sehr elegantes Verfahren von Herrn *Hilbert* ungleich rascher zum Ziel.

Man schließt indirekt: Wäre ξ rational, so könnte das bisher willkürliche

$$g = g(\xi)$$

so bestimmt werden, daß ganzzahlig ausfällt

$$\xi g = [\xi g]. \tag{3}$$

Unsere Abschätzung (1) nimmt alsdann wegen (2.6′) die Form an:

$$0 \leqq |[\xi g] S - H g| < 1. \tag{4}$$

Gelingt es, eine Primzahl ausreichender Größe aufzufinden, etwa bei $\xi \neq 0$:

$$p > g^2 |\xi|,$$

so daß diese als Faktor in allen den Zahlen vorkommt:

$$\left\{\begin{matrix} g_\mu \\ S_\nu \end{matrix}\right. \quad \text{für} \quad \left.\begin{matrix} \mu = 0, \ldots, m \\ \nu = 0, \ldots, n-l-1 \end{matrix}\right\}$$

mit genau einer Ausnahme, so ist

$$\begin{matrix} \xi g S - Hg \not\equiv 0 \ (p) & \text{und a fortiori} \\ \neq 0 & \text{oder} \\ 0 < |R|, & \end{matrix}$$

was mit (4) zu (2) führt im Widerspruch zu (3), welche somit als unzulässige Hypothese erkannt ist.

Die Äquivalenz verschiedener Beweismittel, wie Größenschätzungen und Teilbarkeitsbetrachtungen, kann noch weiter verfolgt werden: Führt man die *Hilbert*sche Methode mit Primzahlpotenzen p^2 durch, statt p^1, so vereinfachen sich unter Umständen die in den Beweis eingehenden Operatoren und analytischen Hilfsmittel.

II. Kapitel: Durchführung an bekannten Funktionen.

Die den folgenden §§ gemeinsamen Gesichtspunkte wurden im I. Kap. dargestellt an Hand der hinreichend allgemein gewählten Potenzreihe 3.5; die zugehörigen Anwendungen können daher in knapper Darstellung gegeben werden ohne Begründung der einzelnen Setzungen; breiter ausgeführt sind die verschiedenen Varianten der Restschätzung nach unten und der § 11.

Geordnet ist im Sinne steigender Schwierigkeit: Für die Behandlung des Integrallogarithmus und des Quadrats der Zylinderfunktionen braucht der Primzahlsatz nicht vorausgesetzt zu werden, wohl aber für den *Euler*schen Dilogarithmus. Die hypergeometrischen Reihen und deren Verallgemeinerungen mit zugehörigen Grenzfällen verlangen Kenntnis der Primzahlverteilung nach Restklassen oder statt dessen Umformungen reeller bestimmter Integrale. Der Schlußparagraph zeigt „höhere Irrationalität" von Zylinderfunktionen durch Umformung vierfach ausgedehnter Summen.

§ 6. Integrallogarithmus.

Es bedeute $C = 0{,}577\ldots$ die *Euler*sche Konstante, $ln\, z$ den Hauptwert des Logarithmus, und es sei vorausgeschickt

Hilfss. 3: Beh.: $\{1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu\} < \nu^{\frac{3\nu}{8}}$ $\qquad \nu_0 < \nu$.

Bew.: Bezeichnen wir die Anzahl aller Primzahlen $< \lambda + 1$ durch $\pi(\lambda)$ so gilt für $2 < \nu$ nach § 1

$$\{1, \ldots, \nu\} = \prod_{p}^{<\nu+1} p^{\left[\frac{\log \nu}{\log p}\right]} < \prod_{p}^{<\nu+1} p^{\frac{\log \nu}{\log p}} = e^{\log \nu \sum_{p}^{<\nu+1} 1} = \nu^{\pi(\nu)}.$$

Die allein noch nötige rohe Schätzung der Primzahlfunktion:

$$\pi(\nu) \leqq \frac{3\nu}{8} \qquad \nu_0 < \nu$$

begründen wir durch ein Siebverfahren. Es gibt nur $\left[\frac{\nu+1}{2}\right]$ ungerade Zahlen $< \nu + 1$, und unter den $\left[\frac{\nu+1}{2}\right]$ kleinsten positiven ungeraden Zahlen können höchstens $\frac{2}{3}\left(\frac{\nu}{2} + 2\right)$ solche vorkommen, die auch durch 3 unteilbar sind; a fortiori ist

$$\pi(\nu) < \frac{2}{3}\left(\frac{\nu}{2} + 2\right) < \frac{3\nu}{8} \qquad \text{für } \nu_0 < \nu.$$

Unsere Aussage bezieht sich auf die ganze Transzendente

$$\int_{\infty}^{x} e^{-y} \frac{dy}{y} - ln\, x - C = li(e^{-x}) - ln\, x - C = \xi(-x),$$

so daß erklärt ist:

$$(1) \qquad \xi(q) = \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{q^\nu}{\nu!\,\nu} = \sum_1^\infty{}^{\nu} u_\nu(q)$$

kurz geschrieben; alsdann ist

$$(1') \qquad \xi(xy) = \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{(xy)^\nu}{\nu!\,\nu} = \sum_1^\infty{}^{\nu} u_\nu(xy)\,;$$

zusätzlich erklären wir

$$u_{-\nu}(q) = u_{-\nu}(xy) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n-2.$$

Für $x^2\mathfrak{D}_x = \mathfrak{T}_x$ und $\mathfrak{D}_y y\,\mathfrak{D}_y = \mathfrak{T}_y$ gilt

$$\mathfrak{T}_x u_\nu(xy) = \mathfrak{T}_y u_{\nu+1}(xy) \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

und für

$$\mathfrak{T}_x^{-1} = \mathfrak{D}_x^{-1} x^{-2} \qquad \text{und } \nu = 1, 2, \ldots:$$

$$u_\nu(xy) = \mathfrak{T}_x^{-1}\mathfrak{T}_y u_{\nu+1}(xy)\,;$$

allgemeiner mit

$$(2) \quad \left.\begin{matrix} n = 2, 3, \ldots \\ \lambda = 0, 1, \ldots, n-2 \\ \nu = n+1,\ n+2, \ldots, 3n \end{matrix}\right\}: \quad u_{\nu-\lambda}(xy) = \mathfrak{T}_x^{-\lambda}\mathfrak{T}_y^{\lambda} u_\nu(xy)\,.$$

Es sei für

(3) $\mu = 0, 1, \ldots, 2n-1$:

$$g_\mu = \{1, 2, \ldots, 2n+1\}\,\frac{(n+\mu+1)!}{(n-1)!}\,(n+\mu+1)\binom{n+\mu}{n}\binom{2n-1}{\mu}\sigma^{2n-\mu-1}\,(-\tau)^{\mu+2}$$

und für $\left\{\begin{matrix} \nu+\mu \geqq 2n \\ \nu = 1, 2, \ldots \end{matrix}\right\}$:

$$(4) \qquad S_\nu(xy) = \sum_0^{2n-1}{}^{\mu} g_\mu\, u_{\mu+\nu+1-2n}(xy)\,;$$

dann folgt aus (2) und (4) für $\left\{\begin{matrix} n = 2, 3, 4, \ldots \\ \lambda = 0, 1, \ldots, n-2 \end{matrix}\right\}$:

$$(5) \qquad S_{3n-\lambda}(xy) = \mathfrak{T}_x^{-\lambda}\mathfrak{T}_y^{\lambda} S_{3n}(xy)$$

$$= \mathfrak{T}_x^{-\lambda}\mathfrak{T}_y^{\lambda} \sum_0^{2n-1}{}^{\mu} g_\mu\, u_{\mu+n+1}(xy),$$

(1′) und (3) eingeführt

$$= \mathfrak{T}_x^{-\lambda}\mathfrak{T}_y^{\lambda} \sum_0^{2n-1}{}^{\mu} (xy)^{\mu+n+1}\binom{n+\mu}{n}\binom{2n-1}{\mu}\sigma^{2n-\mu-1}\,(-\tau)^{\mu+2}\,\frac{\{1, 2, \ldots, 2n+1\}}{(n-1)!}$$

$$= \mathfrak{T}_y^{\lambda}\mathfrak{T}_x^{-\lambda} \sum_0^{2n-1}{}^{\mu} \{x^2\mathfrak{D}_x\}^n x^{\mu+1} y^{\mu+1+n}\binom{2n-1}{\mu}\sigma^{2n-\mu-1}\,(-\tau)^{\mu+2}\,\frac{\{1, 2, \ldots, 2n+1\}}{(n-1)!\,n!},$$

wegen 3. 8

$$= \mathfrak{T}_y^{\lambda}\mathfrak{T}_x^{n-\lambda} \sum_0^{2n-1}{}^{\mu} \binom{2n-1}{\mu}\sigma^{2n-1-\mu}\,(-\tau xy)^\mu y^{1+n} x\tau^2\,\frac{\{1, \ldots, 2n+1\}}{(n-1)!\,n!}$$

$$= \mathfrak{T}_y^{\lambda}\mathfrak{T}_x^{n-\lambda}\,(\sigma - \tau xy)^{2n-1}\,y^{1+n}\,x\,\frac{\tau^2\{1, \ldots, 2n+1\}}{(n-1)!\,n!}\,;$$

die Übertragung von Hilfss. 1 und Hilfss. 2 auf unsere Operatoren $\mathfrak{T}_x$, $\mathfrak{T}_y$ zeigt, daß der Vielfachheitsgrad der Nullstelle $x = \frac{\sigma}{\tau y}$ gerade $(n-\lambda)$-mal um eine Einheit, und dann die Vielfachheit von $y = \frac{\sigma}{\tau x}$ noch λ-mal um zwei Einheiten gesenkt wird; so folgt aus (5) mit denselben Marken die algebraische Kongruenz

$$\begin{aligned} S_{3n-\lambda}(xy) &\equiv 0 \mod (\sigma - \tau xy)^{2n-1-(n-\lambda)-2\lambda} \\ &\equiv 0 \mod (\sigma - \tau xy) \end{aligned}$$

oder entsprechend 3. 2′ die Gleichungen

$$S_{3n-\lambda}(q) = 0 \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 2, 3, 4, \ldots \\ \lambda = 0, 1, \ldots, n-2 \end{array} \right\}. \tag{6}$$

Aus (4) werde nun entsprechend wie bei 2. 7 eine Summe gebildet:

$$\xi(q) \sum_0^{2n-1\mu} g_\mu = \sum_1^{\infty\nu} \sum_0^{2n-1\mu} g_\mu u_\nu(q),$$

umgestellt

$$= \sum_1^{\infty\nu} \sum_0^{2n-1\mu} g_\mu u_{\mu+\nu+1-2n}(q)$$

und wegen (4)

$$= \sum_1^{\infty\nu} S_\nu(q); \tag{7}$$

dies zerfällt aber wegen (6):

$$= \sum_1^{2n+1\nu} S_\nu(q) + \sum_{3n+1}^{\infty\nu} S_\nu(q).$$

Entsprechend 2. 5′ ff. setze man

$$\sum_0^{2n-1\mu} g_\mu = S, \quad \sum_1^{2n+1\nu} S_\nu(q) = H, \quad \sum_{3n+1}^{\infty\nu} S_\nu(q) = R. \tag{8}$$

Dies ist nach 1. 1 zulässig nur, wenn die beiden endlichen Summen in (8) ganzwertig sind; es gilt aber wegen (3) und (8) sogar

$$\begin{aligned} S = (n+2)\left[\frac{\{1, \ldots, 2n+1\}}{n+2}\right] \sum_0^{2n-1\mu} \left[\frac{(n-1+\mu+2)!}{(n-1)!}\right] (n+\mu+1)\binom{n+\mu}{n} \\ \cdot \binom{2n-1}{\mu} \sigma^{2n-1-\mu}(-\tau)^{\mu+2} \\ \equiv 0 \ (n+2). \end{aligned} \tag{9}$$

Die Zahl H untersuchen wir auf Teilbarkeit durch denselben Modul; in Ausführung der in 5. 3 ff. angedeuteten Primzahlmethode verlangen wir aber von jetzt ab, daß primzahlig werde

$$n + 2 = p \tag{10}$$

und bei vorgegebenem g sei

$$p > |\sigma| \tau g. \tag{10′}$$

Nach (1, 3, 4, 8) wird

$$H = \sum_{0}^{2n-1}{}_{\mu} \sum_{1}^{2n+1}{}_{\nu} g_\mu u_{\mu+\nu+1-2n}(q)$$

und, wenn $\sum_\mu \sum'_\nu$ den Ausfall der Zeiger $\mu + \nu = 3n + 1$ fordert,

$$= \sum_{n}^{2n-1}{}_{\mu} g_\mu u_{n+2}(q) + \sum_{0}^{2n-1}{}_{\mu} \sum_{1}^{2n+1}{}_{\nu}' g_\mu u_{\mu+\nu+1-2n}(q)$$

$$= u_{n+2}(q) \sum_{n}^{2n-1}{}_{\mu} g_\mu$$

$$+ p \sum_{0}^{2n-1}{}_{\mu} \sum_{2n-\mu}^{2n+1}{}_{\nu}' (-1)^\mu \left[\frac{\{1, \ldots, 2n+1\}}{p(\mu+\nu+1-2n)}\right]\left[\frac{(1+\mu+n)\cdot(1+\mu+n)!}{(1+\mu+\nu-2n)!\,(n-1)!}\right]\binom{n+\mu}{n}\binom{2n-1}{\mu}\tau^{2n+1-\nu}\sigma^\nu$$

$$\equiv u_{n+2}(q) \sum_{n}^{n+2}{}_{\mu} g_\mu + u_{n+2}(q) \sum_{n+3}^{2n-1}{}_{\mu} g_\mu \qquad (p)$$

$$\equiv u_{n+2}(q) \sum_{n}^{n+2}{}_{\mu} g_\mu + \frac{\sigma^p \tau^{-p}}{p!\,p}\{1, \ldots, 2n+1\} \sum_{n+3}^{2n-1}{}_{\mu} \frac{(n+\mu+1)!}{(n-1)!}(n+\mu+1)\binom{n+\mu}{n}\binom{2n-1}{\mu}$$
$$\cdot \sigma^{2n-\mu-1}(-\tau)^{\mu+2} \qquad (p)$$

$$\equiv u_p(q) \sum_{n}^{p}{}_{\mu} g_\mu - p\left[\frac{\{1, \ldots, 2n+1\}}{p}\right] \sum_{p+1}^{2n-1}{}_{\mu} \left[\frac{(p+\mu-1)!\,(p+\mu-1)}{(p-3)!\,p!\,p}\right]\binom{n+\mu}{n}\binom{2n-1}{\mu}$$
$$\cdot \sigma^{3n-\mu+1}(-\tau)^{\mu+2-p} \qquad (p)$$

$$\equiv g_p u_p(q) + p \sum_{p-2}^{p-1}{}_{\mu} \frac{g_\mu}{p} u_p(q) \qquad (p)$$ und nach (1), (3)

$$\equiv g_p u_p(q) + p \sum_{p-2}^{p-1}{}_{\mu} \left[\frac{\binom{2n-1}{\mu}}{p}\right]\left[\frac{g_\mu q^p}{\binom{2n-1}{\mu} p!\,p}\right] \qquad (p),$$ schließlich für $n > 2$

$$\equiv -\left[\frac{\{1, \ldots, 2n+1\}}{p}\right]\left[\frac{(2p-1)!}{p!\,(p-3)!}\right]\sigma^{2p-5}\binom{2p-5}{p}\binom{2p-2}{p-2}(2p-1)\tau^2 \qquad (p).$$

Und hier ist jeder Faktor

(11) $\not\equiv 0 \quad (p)$

nach (10′), wohl aber

(11′) $\equiv 0 \quad (1)$

und

(11″) $\not\equiv 0$.

Setzt man nach (7) und (8) entsprechend 2. 6′

(12) $\xi(q)\, S - H = R$

und versucht, ξ rational zu wählen, etwa

(13) $g\,\xi(q) \equiv 0 \ (1),$

so folgt aus (9, 10, 10′, 11′, 11″)

(14) $$0 < g|R| \equiv 0 \quad (1)$$

als Auswirkung des *Hilbert*schen Verfahrens von § 5; ob die Annahme (13) aber haltbar ist, entscheidet man durch Abschätzung von $R = R(g)$ aus (1, 3, 4, 8):

$$|R| \leqq \sum_{3n+1}^{\infty} |S_\nu(q)| \leqq \sum_{3n+1}^{\infty} \sum_{0}^{2n-1} |g_\mu|\,|u_{\mu+\nu+1-2n}(q)|, \qquad \text{entsprechend 4. 4}$$

$$= \sum_{0}^{2n-1} |g_\mu q^{\mu+1+n}| \sum_{3n+1}^{\infty} \frac{|q|^{\nu-3n}}{(\mu+\nu+1-2n)!\,(\mu+\nu+1-2n)}$$

$$= \sum_{0}^{2n-1} \frac{|g_\mu q^{\mu+1+n}|}{(\mu+n+1)!\,(\mu+n+1)} \sum_{3n+1}^{\infty} |q|^{\nu-3n} \frac{(\mu+1+n)!\,(\mu+1+n)}{(\mu+1+\nu-2n)!\,(\mu+1+\nu-2n)}$$

$$< \sum_{0}^{2n-1} \frac{|g_\mu q^{\mu+1+n}|}{(\mu+n+1)!\,(\mu+n+1)} \sum_{3n+1}^{\infty} \frac{|q|^{\nu-3n}}{(\nu-3n)!}$$

$$< e^{|q|} \sum_{0}^{2n-1} \frac{|g_\mu q^{\mu+1+n}|}{(\mu+n+1)!\,(\mu+n+1)}, \qquad \text{wegen (3)}$$

$$= e^{|q|} \frac{\{1, \ldots, 2n+1\}}{(n-1)!} \sum_{0}^{2n-1} \binom{n+\mu}{n}\binom{2n-1}{\mu} |q|^{n-1}|\sigma|^{2n+1},$$

wegen Hilfss. 3 für $n > n_0$

$$< e^{|q|} \frac{(2n+1)^{\frac{3}{8}(2n+1)}}{(n-1)!} |\sigma|^{3n} \sum_{0}^{2n-1} \binom{2n-1}{\mu}\binom{n+\mu}{n} \qquad \text{und für } n_0 > n_1(q)$$

$$< \frac{(2n)^{\frac{3}{4}n}}{(n-2)!} |\sigma|^{3n} \binom{3n}{n} \sum_{0}^{2n-1} \binom{2n-1}{\mu} \qquad \text{und für } n_1(q) > n_2$$

$$< \frac{n^{\frac{3n}{4}}}{n!} |2^7\sigma^3|^n \qquad \text{und für } n_2 > n_3 \text{ wegen } \textit{Stirling}\text{s Formel}$$

$$< n^{-\frac{n}{4}} |2^7 e\sigma^3|^n \qquad \text{und für } n_3 > n_4\ (\sigma, g)$$

$$< \frac{1}{g} \text{ im Widerspruch zu (14); somit ist (13) unzulässig und für alle nicht}$$

verschwindenden rationalen q erhält man den

Satz 1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{q^\nu}{\nu!\,\nu}$ ist irrational.

§ 7. Zylinderfunktionen.

Herr *Stridsberg* (St.) hat mit Hilfe *Gordan*scher Symbolik einen Irrationalitätssatz hergeleitet für diejenigen Zylinderfunktionen I. Art, die nach 1. 1. 2 als $J_{m-1}(\sqrt{-q})$ zu bezeichnen sind; eine Verallgemeinerung davon wird in § 9 gegeben; hier aber soll vom Quadrat solcher Zylinderfunktionen gehandelt werden. Sei

(1) $$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

so gilt

$$(1')\quad q^{-k}\{J_k(2\sqrt{-q})\}^2 = \left\{\sum_0^\infty \frac{q^\nu}{\nu!\,(\nu+k)!}\right\}^2 = \sum_0^\infty \frac{q^\nu}{(\nu+k)!^2}\binom{2\nu+2k}{\nu}.$$

Man setze

$$(2)\qquad \frac{q^\nu}{(\nu+k)!^2}\binom{2\nu+2k}{\nu} = u_\nu(q) = u_\nu$$

und

$$(2')\qquad \sum_0^\infty u_\nu = \xi_k(q) = \xi_k.$$

Um den Beweisgang nicht unterbrechen zu müssen, sei der folgende Hilfssatz vorausgeschickt:

Hilfss. 4. Vor.: $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $\nu > \nu_0(k)$.

$$\text{Beh.:}\qquad \left\{\binom{2k+2}{1}, \binom{2k+4}{2}, \ldots, \binom{2k+2\nu}{\nu}\right\} < \nu^{\frac{\nu}{5}}.$$

$$(3)\qquad \text{Bew.:}\ \binom{2\lambda+2k}{\lambda} = \frac{(2\lambda+2k)!}{(\lambda+2k)!\,\lambda!} = \prod_2^{\leqq 2\lambda+2k} p^{\sum_1^\infty i\left[\frac{2\lambda+2k}{p^i}\right]-\left[\frac{\lambda+2k}{p^i}\right]-\left[\frac{\lambda}{p^i}\right]};$$

die obere Summationsgrenze für i wird von Bedeutung erst für $p^i < 2\lambda + 2k + 1$, und so ist

$$(4)\qquad \sum_1^\infty{}_i = \sum_1^{\left[\frac{\log(2\lambda+2k+1)}{\log p}\right]}{}_i\ ;$$

wenn durch α und β reelle, nicht negative Zahlen bezeichnet werden, so sei durch

$$(5)\qquad \alpha - [\alpha] = (\alpha)$$

eine zahlentheoretische Funktion erklärt, für welche

$$0 \leqq (\alpha) < 1$$

gilt. Insbesondere ist

$$0 \leqq (\alpha) + (\beta) - (\alpha+\beta) = [(\alpha) + (\beta) - (\alpha+\beta)] \leqq 1$$

und mit (5)

$$0 \leqq [\alpha+\beta] - [\alpha] - [\beta] \leqq 1$$

$$0 \leqq \left[\frac{2\lambda+2k}{p^i}\right] - \left[\frac{\lambda+2k}{p^i}\right] - \left[\frac{\lambda}{p^i}\right] \leqq 1.$$

Aus (3, 4) folgt

$$(6)\qquad \binom{2\lambda+2k}{\lambda} \leqq \prod_2^{\leqq 2\lambda+2k} p^{\frac{\log(2\lambda+2k+1)}{\log p}}.$$

Denken wir uns in (6) auch die linke Seite als Produkt von Primzahlpotenzen dargestellt, so wird kein Exponent rechts von dem entsprechenden links übertroffen. Jetzt halte man ein bestimmtes p fest und

lasse $\lambda = 1, \ldots, \nu$ werden; dann bilden die Exponenten rechts in (6) eine mit λ monoton wachsende Wertfolge, so daß mit der in Hilfss. 3 erklärten Funktion π

$$\left\{\binom{2k+2}{1}, \ldots, \binom{2k+2\nu}{\nu}\right\} \leqq e^{\log(2k+2\nu+1) \sum_2^{\leqq 2k+2\nu} p^{-1}} = (2k+2\nu+1)^{\pi(2k+2\nu)}.$$

Wie in Hilfss. 3 schätzen wir durch Siebung für $\nu > \nu_1(k)$

$$\pi(2k+2\nu) < \nu^{\frac{\nu}{6}} \qquad \text{und für } \nu_1 > \nu_0(k)$$

$$\left\{\binom{2k+2}{1}, \ldots, \binom{2k+2\nu}{\nu}\right\} < (2k+2\nu+1)^{\frac{\nu}{6}} < \nu^{\frac{\nu}{5}}.$$

Die am Schluß von § 5 erwähnte Vertauschbarkeit gewisser Hilfsmittel im Beweis wird hier praktisch. Es sei eine erste Beweisvariante für $k = 0$ durchgeführt, worin die formale Einfachheit der Operatoren betont ist. Für

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ k = 0 \end{array}\right\}$$

ist nach (2)

$$(8) \qquad u_\nu(xy) = (xy)^\nu \frac{\binom{2\nu}{\nu}}{(\nu)!^2} = \frac{(xy)^\nu}{(\nu!)^4}(2\nu)! = \frac{(2xy)^\nu}{(\nu!)^3} \prod_1^\nu (2\varrho - 1),$$

wo $\prod_1^0 = 1$ erklärt sei; wir zerlegen

$$u_\nu(xy) = \frac{x^\nu}{(\nu!)^3}(4y)^\nu \prod_1^\nu \left(\varrho - \frac{1}{2}\right)$$

und erklären

$$(9) \qquad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{T}}_x &= \mathfrak{D}_x x \, \mathfrak{D}_x x \, \mathfrak{D}_x \\ \bar{\mathfrak{T}}_y &= 4y^{\frac{3}{2}} \mathfrak{D}_y y^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

dann ist

$$\bar{\mathfrak{T}}_y^{-1} = \frac{1}{4} y^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{D}_y^{-1} y^{-\frac{3}{2}},$$

und es gilt für $\nu = 0, 1, \ldots$

$$\bar{\mathfrak{T}}_x u_{\nu+1}(xy) = \bar{\mathfrak{T}}_y u_\nu(xy),$$

allgemein für $\nu = \lambda, \lambda+1, \ldots$

$$(10) \qquad u_{\nu-\lambda}(xy) = \{\bar{\mathfrak{T}}_x^\lambda \bar{\mathfrak{T}}_y^{-\lambda}\} u_\nu(xy).$$

Mit

$$(11) \qquad V = \left\{\binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \ldots, \binom{8n+2}{4n+1}\right\} \quad \text{und} \quad \mu = 0, 1, \ldots, 3n+1$$

bilde man die nach Hilfss. 5 ganzen Zahlen

$$(12) \qquad \bar{g}_\mu = \frac{V}{\binom{2\mu+2n}{\mu+n}} \left[\frac{(\mu+n)!}{n!}\right]^2 \binom{3n+1}{\mu} \prod_1^n \frac{4\mu+4\varrho-2}{\varrho} \sigma^{3n+1-\mu}(-\tau)^\mu$$

und mit (7, 8) und $3n < \mu + \nu$

$$\overline{S}_\nu(q) = \sum_0^{3n+1}{}^{\mu} \bar{g}_\mu u_{\mu+\nu-1-3n}. \tag{13}$$

Dann ist insbesondere für $\lambda = 0, 1, \ldots, n$

$$\overline{S}_{4n+1-\lambda}(xy) = \sum_0^{3n+1}{}^{\mu} \bar{g}_\mu u_{\mu+n-\lambda}(xy) \qquad \text{nach (8, 12)}$$

$$= \frac{V}{(n!)^2} \sum_0^{3n+1}{}^{\mu} \binom{3n+1}{\mu} \sigma^{3n+1-\mu} (-\tau)^\mu \left[\frac{(\mu+n)!}{(\mu+n-\lambda)!}\right]^2 \frac{\binom{2\mu+2n-2\lambda}{\mu+n-\lambda}}{\binom{2\mu+2n}{\mu+n}}$$

$$\cdot \prod_1^n{}^{\varrho} \frac{4\mu+4\varrho-2}{\varrho} (xy)^{\mu+n-\lambda}$$

$$= \frac{V}{(n!)^2} \sum_0^{3n+1}{}^{\mu} \binom{3n+1}{\mu} \sigma^{3n+1-\mu} (-\tau)^\mu \left[\frac{(\mu+n)!}{(\mu+n-\lambda)!}\right]^2$$

$$\cdot \frac{(n+\mu-\lambda+1)\cdots(n+\mu)}{(4n+4\mu-4\lambda+2)(4n+4\mu-4\lambda+6)\cdots(4n+4\mu-2)} \tag{13'}$$

$$\cdot \prod_1^n{}^{\varrho} \frac{4\mu+4\varrho-2}{\varrho} (xy)^{\mu+n-\lambda}$$

$$= \frac{V}{(n!)^3} \sum_0^{3n+1}{}^{\mu} \binom{3n+1}{\mu} \sigma^{3n+1-\mu} (-\tau)^\mu [(n+\mu)\cdots(n+\mu-\lambda+1)]^3$$

$$\cdot x^{n+\mu-\lambda} 4^{n-\lambda} \left(\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\mu+n-\lambda-\frac{1}{2}\right)\right) y^{n+\mu-\lambda}$$

$$= \frac{V}{(n!)^3} \sum_0^{3n+1}{}^{\mu} \binom{3n+1}{\mu} \sigma^{3n+1-\mu} (-\tau)^\mu \overline{\mathfrak{T}}_x^\lambda x^{n+\mu} \overline{\mathfrak{T}}_y^{n-\lambda} y^\mu$$

nach (9) und (10);

$$= \frac{V}{(n!)^3} \overline{\mathfrak{T}}_x^\lambda \overline{\mathfrak{T}}_y^{n-\lambda} x^n (\sigma - \tau xy)^{3n+1} \qquad \text{und wegen Hilfss. 2}$$

$$\equiv 0 \text{ mod. } (\sigma - \tau xy)^{3n+1-3\lambda-(n-\lambda)}$$

$$\equiv 0 \text{ mod. } (\sigma - \tau xy), \quad \text{insbesondere } \overline{S}_{4n+1-\lambda}(q) = 0 \text{ für } \lambda = 0, \ldots, n.$$

(14) Sei $n + 1 = p$ primzahlig, dann zeigen (8, 12, 13), daß

$$\sum_\nu^{3n} \overline{S}_\nu(q) = \sum_1^{3n+1}{}^{\mu} \sum_{3n+1-\mu}^{3n}{}^{\nu} \bar{g}_\mu u_{\mu+\nu-3n-1} \qquad \text{und nach Hilfss. 5}$$

$$= \sum_1^{3n+1}{}^{\mu} \sum_{3n+1-\mu}^{3n}{}^{\nu} (-1)^\mu \left[\frac{(n+\mu)!}{n!\,(\mu+\nu-3n-1)!}\right]^2 \left[\frac{\left\{\binom{2}{1},\ldots,\binom{8n+2}{4n+1}\right\}}{\binom{2\mu+2n}{\mu+n}}\right]$$

$$\cdot \binom{3n+1}{\mu} \tau^{3n+1-\nu} \sigma^\nu \binom{2\mu+2\nu-6n-2}{\mu+\nu-3n-1} \left[\prod_1^n{}^{\varrho} \frac{4\mu+4\varrho-2}{\varrho}\right]$$

$$= p^2 \sum_1^{3n+1}{}^{\mu} \sum_{3n+1-\mu}^{3n}{}^{\nu} (-1)^\mu \left[\frac{(n+\mu)!}{(n+1)!\,(\mu+\nu-3n-1)!}\right]^2 \cdots$$

$\equiv 0\ (p^2)$, und Hilfss. 5 mit (11, 12), daß

$$\sum_0^{3n+1}{}^{\mu} \bar{g}_\mu = \bar{g}_0 + \sum_1^{3n+1}{}^{\mu} \bar{g}_\mu = \bar{g}_0 + p^2 \sum_1^{3n+1}{}^{\mu} \left[\frac{V}{\binom{2\mu+2n}{\mu+n}}\right]\left[\frac{(\mu+n)!}{(1+n)!}\right]^2 \binom{3n+1}{\mu}$$

$$\cdot \left[\prod_1^n{}^{\varrho} \frac{4\mu+4\varrho-2}{\varrho}\right] \sigma^{3n+1-\mu}(-\tau)^\mu$$

$$\equiv \left[\frac{V}{\binom{2n}{n}}\right]\left[\prod_1^n{}^{\varrho} \frac{4\varrho-2}{\varrho}\right] \sigma^{3n+1} \quad (p^2)$$

$\equiv V \cdot \sigma^{3n+1}\ (p^2)$, also für $p > |\sigma|$ und wegen (3—6) für $p > 7$

$\equiv\!|\equiv 0\ (p^2)$, wohl aber nach (11, 12, 14)

$\equiv 0\ (p)$.

Mit den üblichen Abkürzungen

$$\sum_0^{3n+1} \bar{g}_\mu = \overline{S} \quad \text{und} \quad \sum_0^{3n} \overline{S}_\nu = \overline{H}$$

und Vorwegnahme von $\xi \not\equiv 0$ aus 9. 18 führt die Annahme $\bar{g}\,\xi \equiv 0\ (1)$ für $p > \bar{g}^2 |\xi| > 0$ falls

$$\sum_{4n+2}^{\infty}{}^{\nu} \overline{S}_\nu = \overline{R} \tag{15}$$

eingeführt wird, wie in § 5 zu

$$0 < \bar{g}\,|\overline{R}| \equiv 0\ (1). \tag{16}$$

Nun greift Hilfss. 4 zu einer Majorantenbildung für den Rest $\overline{R}$ ein; er gibt mit (8, 12, 13, 15):

$$|\overline{R}| \leqq \sum_0^{3n+1}{}^{\mu} \sum_{4n+2}^{\infty}{}^{\nu} |\bar{g}_\mu|\,|u_{\mu+\nu-3n-1}|$$

$$< \sum_0^{3n+1}{}^{\mu} \frac{|\bar{g}_\mu|}{(\mu+n)!^2} \sum_{4n+2}^{\infty}{}^{\nu} |4q|^{\mu+\nu-3n-1} \left(\frac{(\mu+n)!}{(\mu+\nu-3n-1)!}\right)^2$$

$$< e^{4|q|} \sum_0^{3n+1}{}^{\mu} \frac{|4q|^{n+1+\mu}|\bar{g}_\mu|}{(\mu+n)!^2}$$

$$= e^{4|q|} \frac{V}{(n!)^2} |4q|^{n+1} |\sigma|^{3n+1} \sum_0^{3n+1}{}^{\mu} 4^{\mu+n} \frac{\binom{\mu+n-\frac{1}{2}}{n}}{\binom{2\mu+2n}{\mu+n}} \binom{3n+1}{\mu} \quad \text{und mit } c = c(\sigma)$$

$$< \frac{V}{(n!)^2} |2\sigma|^{cn}, \quad \text{weiter für } n > n_1(n_0, c) \text{ mit Hilfss. 4}$$

$$< \frac{n^{\frac{9}{10}n}}{(n!)^2}, \quad \text{schließlich nach } \textit{Stirling}\text{scher Formel für } n_1 > n_2$$

$< \frac{1}{n!} n^{-\frac{n}{10}} e^n$ und für $n_2 > n_3(\bar{g})$

$< \frac{1}{\bar{g}}$; um den Schluß auf Irrationalität von ξ zu ziehen, bleibt somit nur noch nachzutragen der

Hilfss. 5. Vor.: $n = 1, 2, \ldots;\ \mu = 0, 1, \ldots$

Beh.: $$\prod_{1}^{n}{}_{\varrho} \frac{4\mu + 4\varrho - 2}{\varrho} \equiv 0 \ (1).$$

Bew.: Um $4^n \prod_{1}^{n}{}_{\varrho} \frac{\mu + \varrho - \frac{1}{2}}{\varrho} = (-4)^n \binom{-\frac{1}{2} - \mu}{n} \equiv 0\ (1)$ nachzuweisen, setze man $\mu + n = m$; dann gilt die Beh. für $m = 1$ und soll durch Induktion über m ergänzt werden. Weil sie auch für die „Randfälle" $\left\{\begin{matrix} n \text{ beliebig} \\ \mu = 0 \end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix} n = 1 \\ \mu \text{ beliebig} \end{matrix}\right\}$ gilt, genügt es, sie von den m Zahlpaaren $\left\{\begin{matrix} n = 1, & \ldots, m \\ \mu = m - 1, \ldots, & 0 \end{matrix}\right\}$ zu übertragen auf die $m - 1$ Zahlpaare $\left\{\begin{matrix} n = 2, & \ldots, m \\ \mu = m - 1, \ldots, & 1 \end{matrix}\right\}$. Das leistet aber das Additionstheorem der Binomialkoeffizienten

$$\binom{-\frac{1}{2} - (\mu - 1)}{n+1} - \binom{-\frac{1}{2} - \mu}{n} = \binom{-\frac{1}{2} - \mu}{n+1}.$$

Also gilt die Beh. auch für $m + 1$.

Es gilt aber ein entsprechender Irrationalitätssatz für die allgemeinere, durch (2, 2′) erklärte Potenzreihe, den wir jetzt aussprechen und beweisen wollen. Während bei der bisherigen Beweisvariante das *Hilbert*sche Primzahlverfahren erst bei Teilung durch p^2 zum Schluß führte, wird dort schon Teilung durch p ausreichen; allerdings gestalten sich die Operatoren umfangreicher.

Satz 2. Vor.: 7. 1. 2. 2′ und 9. 18. 18′.

Beh.: ξ_k ist irrational.

Bew.: Der schon erledigte Fall $k = 0$ ordnet sich dem neuen Verfahren ein, so daß er zwiefach beweisbar ist; wir verzichten auf dessen Ausführung und setzen jetzt

(17) $$k = 1, 2, \ldots$$

Vorweggenommen werde der folgende

Hilfss. 6. Vor.:

(18, 19) $$\left\{\binom{2k+2}{1}, \binom{2k+4}{2}, \ldots, \binom{10n+2}{5n+1-k}\right\} = W; \quad \left\{\begin{matrix} n > k = 1, 2, \ldots \\ n + k + 1 = p \\ \mu = 0, 1, \ldots, \\ \qquad 4n + 1 \\ \mu \not\equiv 0\ (p) \end{matrix}\right\}.$$

Beh.: $$\frac{W\binom{n+\mu}{n}}{\binom{2n+2\mu}{n+\mu-k}} \equiv 0 \ (p).$$

Bew.: Nach (18, 19) ist $W \equiv 0\ (p)$; wegen (19) und $n+1 < p < 2n$ folgt $\binom{2n+2\mu}{n+\mu-k} \not\equiv 0\ (p^2)$; nach (18) ist $W \not\equiv 0\ (p^2)$. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I.) $\mu \equiv 1, 2, \ldots, k\ (p)$; dann gilt $0 \equiv (n+\mu+k)! \not\equiv \frac{(2n+2\mu)!}{(n+\mu+k)!}\ (p)$, woraus $\binom{2n+2\mu}{n+\mu-k} \not\equiv 0\ (p)$ und die Beh. folgt.

II.) $\mu \not\equiv 0, 1, \ldots, k\ (p)$; dann wird $\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k) \not\equiv 0\ (p)$ und nach einem bekannten Satz $(\mu+n)\ldots(\mu+1) \equiv 0\ (p)$; somit folgt $W\binom{n+\mu}{n} \equiv 0\ (p^2)$ und die Beh.

Es ist nun an (2) anzuknüpfen; für $\mu = 0, 1, \ldots, 4n+1$ sei

$$(20) \qquad \frac{W}{\binom{2n+2\mu}{n+\mu-k}}\left[\frac{(\mu+n)!}{n!}\right]^2\binom{2\mu+2n}{2n}\binom{4n+1}{\mu}\sigma^{4n+1-\mu}(-\tau)^{\mu} = g_{\mu}.$$

Statt (13) kommt mit $4n < \mu + \nu$

$$(21) \qquad \sum_0^{4n+1\,\mu} g_{\mu}\, u_{\mu+\nu-4n-1} = S_{\nu}(q),$$

und mit (17, 18) bilde man

$$S_{5n+1-k}(xy^2) = \sum_0^{4n+1\,\mu} g_{\mu}\frac{\binom{2n+2\mu}{n+\mu-k}}{(n+\mu!)^2}(xy^2)^{n+\mu-k}$$

$$= \frac{W}{n!^2}\sum_0^{4n+1\,\mu}\binom{4n+1}{\mu}\binom{2n+2\mu}{2n}\sigma^{4n+1-\mu}(-\tau)^{\mu}(xy^2)^{n+\mu-k}.$$

Sei nun

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{D}_x x^{1-k}\,\mathfrak{D}_x x\,\mathfrak{D}_x x^{1-k}\,\mathfrak{D}_x x^{2k} = \mathfrak{T}_x \\ y^{2-2k}\mathfrak{D}_y^2 y^{2+2k} = \mathfrak{T}_y, \qquad \mathfrak{T}_y^{-1} = y^{-2k-2}\mathfrak{D}_y^{-2}y^{2k-2} \end{array}\right\},$$

so gilt für $l = 0, \ldots, \nu$

$$u_{\nu-l}(xy^2) = \mathfrak{T}_x^l\,\mathfrak{T}_y^{-l}\,u_{\nu}(xy^2).$$

$$S_{5n+1-k}(xy^2) = \frac{W}{n!^2}\sum_0^{4n+1\,\mu}\binom{4n+1}{\mu}\sigma^{4n+1-\mu}(-\tau)^{\mu}x^{n-k}\frac{1}{(2n)!}\mathfrak{T}_y^n y^{-2k+2\mu}x^{\mu}$$

$$= \frac{W x^{n-k}}{n!^2\,(2n)!}\mathfrak{T}_y^n y^{-2k}\sum_0^{4n+1\,\mu}\binom{4n+1}{\mu}\sigma^{4n+1-\mu}(-\tau xy^2)^{\mu}$$

$$= \frac{W\,x^{n-k}}{n!^2\,(2n)!}\mathfrak{T}_y^n y^{-2k}(\sigma-\tau xy^2)^{4n+1}$$

und mit (21) und $\lambda = 0, \ldots, n$

$$S_{5n+1-k-\lambda}(xy^2) = \mathfrak{T}_x^{\lambda}\mathfrak{T}_y^{-\lambda}S_{5n+1-k}(xy^2)$$

$$= \frac{W}{n!^2\,(2n)!}\mathfrak{T}_x^{\lambda}x^n\,\mathfrak{T}_y^{n-\lambda}(xy^2)^{-k}(\sigma-\tau xy^2)^{4n+1} \qquad \text{und nach Hilfss. 2}$$

$$\equiv 0 \text{ mod. } (\sigma-\tau xy^2)^{4n+1-4\lambda-2(n-\lambda)}$$

$$\equiv 0 \text{ mod. } (\sigma-\tau xy^2) \qquad \text{und für die gleichen } \lambda\text{: } S_{5n+1-k-\lambda}(q) = 0.$$

Wie oben zeigt die Abschätzung des Restes nach Hilfss. 4

$$\left| \sum_{5n+2-k}^{\infty}{}_{\nu} S_\nu(q) \right| < \frac{1}{g}, \tag{22}$$

falls $n > n_4(g, \sigma, k)$ gewählt wird. Sei

$$\sum_{5n+2-k}^{\infty}{}_{\nu} S_\nu(q) = R, \quad \sum_{0}^{4n-k}{}_{\nu} S_\nu(q) = H, \quad \sum_{0}^{4n+1}{}_{\mu} g_\mu = S$$

und bedeute $\sum'_\mu$ den Ausfall der Glieder $\mu \equiv 0\ (p)$, so verfolgen wir die Teilbarkeit der Summanden in H und S:

$$S = g_0 + \sum_{1}^{4n+1}{}'_{\mu} g_\mu + g_p + g_{2p} + g_{3p} \qquad \text{und, wenn in (20) } \begin{Bmatrix} n > 3k+1 \\ m = 1,2,3 \\ \mu = p\,m \end{Bmatrix} \text{ eingeführt wird,}$$

$$= g_0 + \sum_{1}^{4n+1}{}'_{\mu} g_\mu + \sum_{1}^{3}{}_{m} p \left[\frac{W\binom{mp+n}{n}}{\binom{2n+2pm}{n+pm-k}} \right] \left[\frac{(mp)!}{p} \right] \left[\frac{(n+mp)!}{n!} \right] \binom{2mp+2n}{2n}$$

$$\cdot \binom{4n+1}{mp} \sigma^{4n+1-mp} (-\tau)^{mp}$$

$$\equiv g_0 + \sum_{1}^{4n+1}{}'_{\mu} g_\mu \quad (p); \qquad \text{wegen Hilfss. 6 weiter}$$

$$\equiv g_0 + p \sum_{1}^{4n+1}{}'_{\mu} \left[\frac{W\binom{\mu+n}{n}}{p\binom{2n+2\mu}{n+\mu-k}} \right] \mu! \left[\frac{(n+\mu)!}{n!} \right] \binom{2\mu+2n}{2n} \binom{4n+1}{\mu}$$

$$\cdot \sigma^{4n+1-\mu} (-\tau)^{\mu} \quad (p)$$

$$\equiv g_0 \quad (p)$$

$$\equiv \sigma^{4n+1} \left[\frac{W}{\binom{2n}{n-k}} \right] \quad (p) \qquad \text{und wegen } W \not\equiv 0\,(p^2) \text{ für hinreichend großes } n$$

$$\not\equiv 0 \quad (p). \tag{23}$$

Ebenso reduzieren wir den Hauptteil nach p:

$$H = \sum_{k+1}^{4n+1}{}_{\mu} g_\mu \sum_{4n+1-\mu}^{4n-k}{}_{\nu} u_{\mu+\nu-4n-1}$$

$$= \sum_{k+1}^{4n+1}{}_{\mu} (-1)^\mu \binom{4n+1}{\mu} \binom{2n+2\mu}{2n} \frac{W}{\binom{2n+2\mu}{n+\mu-k}}$$

$$\cdot \sum_{4n+1-\mu}^{4n-k}{}_{\nu} \left[\frac{(\mu+n)!}{n!\,(\mu+\nu+k-4n-1)!} \right]^2 \binom{2\mu+2\nu+2k-8n-2}{\mu+\nu-4n-1} \tau^{4n+1-\nu} \sigma^\nu$$

$$= p \sum_{k+1}^{4n+1} \left[\frac{W\mu \binom{\mu+n}{n}}{p\binom{2n+2\mu}{n+\mu-k}} \right] (-1)^{\mu} \binom{4n+1}{\mu} \binom{2n+2\mu}{2n}$$

$$\cdot \sum_{4n+1-\mu}^{4n-k} \left[\frac{(\mu-1)!}{(\mu+\nu+k-4n-1)!} \right] \left[\frac{(\mu+n)!}{n!(\mu+\nu+k-4n-1)!} \right]$$

$$\cdot \tau^{4n+1-\nu} \sigma^{\nu} \binom{2\mu+2\nu+2k-8n-2}{\mu+\nu-4n-1}$$

(24) $\equiv 0 \quad (p)$ nach Hilfss. 5.

Die Näherungsform

$$\xi_k S - H = R$$

läßt mit *Hilberts* Verfahren, Hilfss. 4 und (22—24) die Irrationalität von ξ_k erkennen, wenn wir aus 9. 18′ $\xi_k \neq 0$ vorwegnehmen.

§ 8. Der Dilogarithmus.

In den bisherigen Beispielen war $\xi(x)$ eine ganze Transzendente; mit der Beschränktheit des Konvergenzgebiets der Potenzreihe $\xi(x)$, wie sie in § 8 und § 10 in Erscheinung tritt, verringert sich der Umfang der geleisteten Aussage auf einen Teilbereich der bisher betrachteten Argumente und zugehörigen Funktionswerte.

Außerdem erfordert das veränderte Konvergenzverhalten von $\xi(x)$ eine Verschärfung der bisher geübten Restschätzung nach oben: die fast trivialen Abschätzungen der Primzahlfunktion in den Hilfss. 3 und 4 sind dann zu ersetzen durch die *Riemann*sche Primzahlformel.

Die von *Euler* eingeführte analytische Funktion des reellen Argumentes $0 \leqq x^2 \leqq 1$

$$(1) \qquad dil\ x = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{\nu^2}$$

wurde funktionentheoretisch eingehend behandelt durch Herrn *Mantel* (M.); nach Herrn *Lindemann* sind die Funktionswerte $dil(\pm 1)$ transzendent.

Einer brieflichen Mitteilung Herrn *J. Schur*s entnehmen wir

Hilfss. 7. Vor.: $0 < \varepsilon;\ 2 < n_0 < n.$

Beh.: $\{1, 2, 3, \ldots, n\} < e^{n(1+\varepsilon)}.$

Bew.: Weil nach *Riemann*

$$\sum_{2}^{<n+1_p} 1 < \frac{n}{\log n}(1+\varepsilon),$$

schätzt man

$$\{1, 2, \ldots, n\} = \prod_{p}^{<n+1} p^{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]} < \prod_{p}^{<n+1} p^{\frac{\log n}{\log p}} = e^{\log n \sum_{p}^{<n+1} 1} < e^{n(1+\varepsilon)}.$$ [1])

Mit $\nu = 1, 2, \ldots$ sei

$$(2) \qquad u_{\nu}(q) = \frac{q^{\nu}}{\nu^2} = u_{\nu}; \qquad \{1, 2, \ldots, 2n\} = V; \quad \mu = 1, 2, \ldots, 2n;$$

---

[1]) Es gilt sogar schärfer: $\lim_{n\to\infty} \{1, 2, \ldots, n\}^{\frac{1}{n}} = e$, was wir hier nicht benötigen.

$$(3) \qquad V^2(\mu+n)^2\binom{2n-1}{\mu-1}\binom{\mu+n-1}{n-1}^2\sigma^{2n-\mu}(-\tau)^\mu = g_\mu$$

und für $2n < \mu + \nu$

$$(4) \qquad \sum_1^{2n}{}^{\mu} g_\mu u_{\mu+\nu-2n} = S_\nu ;$$

dann gilt für $\lambda = 0, 1, \ldots, n-1$

$$u_{n-\lambda}(xy) = \{\mathfrak{D}_y y\,\mathfrak{D}_y\}^\lambda \frac{y^n}{n!^2}\{\mathfrak{D}_x^{-1}x^{-1}\mathfrak{D}_x^{-1}x^{-2}\}^\lambda (n-1)!^2 x^n$$
$$= \{\mathfrak{D}_y y\,\mathfrak{D}_y\}^\lambda \{\mathfrak{D}_x^{-1}x^{-1}\mathfrak{D}_x^{-1}x^{-2}\}^\lambda u_n(xy);$$

und mit (4)

$$S_{3n-\lambda}(xy) = \sum_1^{2n}{}^{\mu} g_\mu u_{\mu+n-\lambda}(xy)$$
$$= \sum_1^{2n}{}^{\mu} g_\mu \{\mathfrak{D}_y y\,\mathfrak{D}_y\}^\lambda \{\mathfrak{D}_x^{-1}x^{-1}\mathfrak{D}_x^{-1}x^{-2}\}^\lambda u_{\mu+n}(xy)$$
$$= V^2 \sum_1^{2n}{}^{\mu}\binom{2n-1}{\mu-1}\sigma^{2n-\mu}(-\tau)^\mu\binom{\mu+n-1}{n-1}^2\{\mathfrak{D}_y y\,\mathfrak{D}_y\}^\lambda y^{\mu+n}$$
$$\cdot\{\mathfrak{D}_x^{-1}x^{-1}\mathfrak{D}_x^{-1}x^{-2}\}^\lambda x^{\mu+n}$$
$$= \left(\frac{V}{(n-1)!}\right)^2(-\tau)\{\mathfrak{D}_y y\,\mathfrak{D}_y\}^\lambda y^{1+n}\{x^2\mathfrak{D}_x x\,\mathfrak{D}_x\}^{n-1-\lambda}x^2 \sum_1^{2n}{}^{\mu}\binom{2n-1}{\mu-1}$$
$$\cdot\sigma^{2n-\mu}(-\tau xy)^{\mu-1}$$
$$= \left(\frac{V}{(n-1)!}\right)^2(-\tau)\{\mathfrak{D}_y y\,\mathfrak{D}_y\}^\lambda\{x^2\mathfrak{D}_x x\,\mathfrak{D}_x\}^{n-1-\lambda}(\sigma-\tau xy)^{2n-1}x^2y^{1+n}$$

und nach Hilfss. 2

$$\equiv 0 \text{ mod. } (\sigma-\tau xy)^{2n-1-2\lambda-2(n-1-\lambda)}$$

$$(5) \qquad \equiv 0 \text{ mod. } (\sigma-\tau xy), \text{ insbesondere also } S_{3n-\lambda}(q) = 0. \text{ Mit}$$

$$(6) \qquad \sum_1^{2n}{}^{\mu} g_\mu = S, \qquad \sum_1^{2n}{}^{\nu} S_\nu = H, \qquad \sum_{3n+1}^{\infty}{}^{\nu} S_\nu = R$$

wird, falls

$$2n-1 = p$$

primzahlig gewählt ist, nach (3)

$$S = p\left[\frac{V^2}{p}\right]\sum_1^{2n}{}^{\mu}(\mu+n)^2\binom{2n-1}{\mu-1}\binom{\mu+n-1}{n-1}^2\sigma^{2n-\mu}(-\tau)^\mu$$

$$(7) \qquad \equiv 0 \quad (p).$$

Die Teilbarkeit des Hauptteils H durch p untersuchen wir, indem die Zeigerkombination $\mu + \nu = 2n + p$ herausgehoben wird, während die verbleibende Doppelsumme durch $\Sigma\Sigma'$ angedeutet sei:

$$H = \sum_{1}^{2n}{}_{\nu} \sum_{2n+1-\nu}^{2n}{}_{\mu} g_\mu \frac{q^{\mu+\nu-2n}}{(\mu+\nu-2n)^2}$$

$$= \frac{q^p}{p^2} \sum{}_{\nu} \sum{}_{\mu}^{\mu+\nu=p+2n} g_\mu + \sum{}_{\nu} \sum{}_{\mu}^{\prime\,\mu+\nu\neq p+2n} g_\mu \frac{q^{\mu+\nu-2n}}{(\mu+\nu-2n)^2}$$

$$= \frac{q^p}{p^2} \sum_{2n-1}^{2n}{}_{\mu} g_\mu + p^2 \sum{}_{\nu} \sum{}_{\mu}^{\prime} \left[\frac{V}{p(\mu+\nu-2n)}\right]^2 (-1)^\mu \binom{2n-1}{\mu-1} \left[n\binom{\mu+n}{n}\right]^2 \cdot \sigma^\nu \tau^{2n-\nu}$$

$$\equiv \frac{q^p}{p^2} (g_{2n-1} + g_{2n})$$

$$\equiv \frac{q^p}{p^2} g_{2n} - p \left[\frac{V^2}{p^2}\right] (3n-1)^2 \binom{3n-2}{n-1}^2 \sigma\tau^p$$

$$\equiv \frac{q^p g_{p+1}}{p^2}$$

$$\equiv \left[\frac{V}{p}\right]^2 9n^2 \binom{3n-1}{n-1}^2 \sigma^p \tau \qquad \text{und für } p > 3\tau|\sigma|$$

(8) $\not\equiv 0 \ (p)$, wohl aber

$\equiv 0 \ (1)$.

Aus

(9) $$g \; dil \; q \equiv 0 \ (1)$$

würde nach (1, 4, 6, 7, 8, 9)

(10) $$|S \; dil \; q - H| = |R| \geqq \frac{1}{g}$$

für hinreichend großes n folgen.

Andrerseits geben (2, 4, 6, 9) direkt eine Abschätzung:

$$|R| \leqq \sum_{1}^{2n}{}_{\mu} |g_\mu| \sum_{3n+1}^{\infty}{}_{\nu} |u_{\mu+\nu-2n}| \qquad \text{und mit der geometrischen Reihe als Majorante}$$

$$< \frac{\tau}{\tau - |\sigma|} \sum_{1}^{2n}{}_{\mu} \frac{|g_\mu \cdot q^{\mu+n+1}|}{(\mu+n+1)^2}, \qquad \text{nach (3)}$$

$$< \tau |q|^{n+1} V^2 \sum_{1}^{2n}{}_{\mu} \binom{2n-1}{\mu-1} \binom{\mu+n-1}{n-1}^2 \sigma^{2n}, \qquad \text{nach Hilfss. 7}$$

$$< \left\{\frac{|\sigma|^3 e^{2(1+\varepsilon)}}{\tau}\right\}^n |\sigma| \sum_{1}^{2n}{}_{\mu} \binom{2n-1}{\mu-1} 2^{6n}, \qquad \text{für } n > n_0(\varepsilon, \sigma, \tau)$$

$$< (2^8 e^{2+3\varepsilon} |\sigma|^3 \tau^{-1})^n;$$

für $n_0 > n_1(g, \tau)$ ist, falls $2^8 e^2 |\sigma|^3 < \tau$ bleibt, ein Widerspruch zu (10) gefunden. Somit gilt für den Dilogarithmus

Satz 3. Vor.: $2^8 e^2 |\sigma|^3 < \tau$ und 1. 2.

Beh.: $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{q_\nu}{\nu^2}$ ist irrational.

§ 9. Hypergeometrische Grenzfälle.

Verallgemeinert man die aus der *Gauß*schen Reihe durch Grenzübergang entstandene

$$\lim_{\alpha\to\infty}\lim_{\beta\to\infty} F\Big(\alpha, \beta, \gamma; \frac{x}{\alpha\beta}\Big)$$

derart, daß an Stelle der ganzzahligen Fakultäten im Nenner jedes Reihengliedes gebrochene treten, so kann mit leichter Bezeichnungsänderung und den Kürzungen

$$(1)\quad u_\nu(q) = \prod_1^\nu{}_\varrho \frac{q}{\Big(\varrho+\frac{\gamma}{c}\Big)\Big(\varrho+\frac{\delta}{d}\Big)} = u_\nu,\quad \left\{\begin{array}{c} 0 < cd \equiv d \equiv c \equiv \gamma \equiv \delta \equiv 0\ (1) \\ \gamma \not\equiv -c, -2c, \ldots; \delta \not\equiv -d, -2d, \ldots \end{array}\right\}$$

die Potenzreihe

$$(2)\qquad \xi = \sum_1^\infty{}_\nu u_\nu$$

betrachtet werden.

Der Schwerpunkt der Untersuchung liegt dabei in der Restschätzung nach unten: Wie weit trägt das *Hilbert*sche Verfahren und welche Methoden scheinen geeignet, jenes in schwierigen Fällen zu ersetzen?

Es darf o. B.

$$(3)\qquad 0 < c \leqq d$$

und für $c = d$ speziell $\gamma \leqq \delta$ gewählt werden; zunächst sei zudem

$$(4)\qquad 1 < d,$$

und o. B. $(\delta, d) = 1$ (Teilerfremdheit), also insbesondere

$$0 < \delta^2.$$

Nach *Dirichlet* gibt es dann immer eine Primzahl p folgender Doppeleigenschaft

$$(5)\qquad 2\delta^2 d < p \equiv \delta(d).$$

Damit ist eine positive ganze Zahl bestimmt: $\dfrac{p-\delta}{d} = n > 1$, und es gilt

$$(6)\qquad d\nu + \delta \not\equiv 0\ (p) \qquad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$(6')\qquad \equiv 0\ (p) \qquad \text{für } \nu = n, n+p, \ldots$$

Für die Zeiger $\mu = 0, 1, \ldots, 2p$ bilde man

$$(7)\qquad g_\mu = \frac{(cd)^{4p+2n}\sigma^{2p-\mu}(-\tau)^\mu}{(n-1)!^2}\binom{2p}{\mu}\prod_1^{\mu+n-1}{}_\varrho \Big(\varrho+\frac{\gamma}{c}\Big)\Big(\varrho+\frac{\delta}{d}\Big)$$

und erhält nach (6) und Hilfss. 8 die Kongruenzen

$$(7')\qquad g_0 = (cd)^{4p+2}\sigma^{2p}\left[\prod_1^{n-1}{}_\varrho \frac{c^2\varrho+\gamma c}{\varrho}\,\frac{d^2\varrho+d\delta}{\varrho}\right] \equiv 0\ (1),$$

dagegen für $n > n_0(\gamma, \sigma)$

$$\not\equiv 0\ (p);$$

ebenso stellt man fest

$$-g_p = (cd)^{2p+2}\sigma^p\,\tau^p\binom{2p}{p}\left[\prod_{1}^{p+n-1}{}_{\varrho}\;\frac{c^2\varrho+c\gamma}{\varrho}\;\frac{d^2\varrho+d\delta}{\varrho}\right]\cdot[n(n+1)\dots p\dots(p+n-1)]^2$$

$$\equiv 0\ (p);$$

$$g_{2p} = c^2 d^2 \tau^{2p}\left[\prod_{1}^{2p+n-1}{}_{\varrho}\;\frac{c^2\varrho+c\gamma}{\varrho}\;\frac{d^2\varrho+d\delta}{\varrho}\right][n(n+1)\dots p\dots(2p+n-1)]^2$$

$$\equiv 0\ (p).$$

Setzen wir

$$\sum_{0}^{2p}{}_{\mu}\, g_\mu = S \tag{8}$$

ganzzahlig, und bedeute $\sum''_{\mu}$ den Ausfall der Glieder mit $\mu \equiv 0\ (p)$, so ist

$$S = g_0 + g_p + g_{2p} + \sum''_{\mu} g_\mu \equiv g_0 + p\sum''_{\mu}\left[\frac{g_\mu}{\binom{2p}{\mu}}\right]\left[\frac{\binom{2p}{\mu}}{p}\right]$$

$$\not\equiv 0\ (p), \quad \text{wohl aber} \quad \equiv 0\ (1). \tag{8'}$$

Nach (1, 6, 7) sei

$$\sum_{0}^{2p}{}_{\mu}\, g_\mu\, u_{\mu+\nu-2p} = S_\nu\ (q) \tag{9}$$

mit $2p < \mu + \nu$ und

$$\sum_{1}^{p+n-1}{}_{\nu}\, S_\nu(q) = H; \tag{10}$$

dann gilt nach Hilfss. 8, wenn das dortige ϱ hier als $\varrho + 2p - \mu - \nu$ eingeht,

$$H = \sum_{1}^{p+n-1}{}_{\nu}\sum_{2p+1-\nu}^{2p}{}_{\mu}(-1)^\mu\binom{2p}{\mu}\left[\prod_{\mu+\nu+1-2p}^{\mu+n-1}{}_{\varrho}\;\frac{(c^2\varrho+c\gamma)(d^2\varrho+d\delta)}{(\varrho+2p-\mu-\nu)^2}\right]\left[\frac{(2p+n-1-\nu)!}{(n-1)!\,p}\right]^2$$

$$\cdot\, p^2\sigma^\nu\tau^{2p-\nu}(cd)^{2\nu+2}$$

$$\equiv 0\ (p^2). \tag{11}$$

Mit

$$\sum_{2p+n}^{\infty}{}_{\nu}\, S_\nu = R \tag{12}$$

schätzt man vermöge (1, 7, 9)

$$|R| \leqq \sum_{0}^{2p}{}_{\mu}\,|g_\mu|\sum_{2p+n}^{\infty}{}_{\nu}\,|u_{\mu+\nu-2p}|$$

$$= \sum_{0}^{2p}{}_{\mu}\frac{|q^{\mu+n}g_\mu|}{(\mu+n)!^2}\sum_{2p+n}^{\infty}{}_{\nu}\frac{|q^{\nu-2p-n}(\mu+n)!^2|}{\left|\prod_{1}^{\mu+\nu-2p}{}_{\varrho}\left(\varrho+\frac{\gamma}{c}\right)\left(\varrho+\frac{\delta}{d}\right)\right|}\quad \text{und für } p > p_0(\gamma,\delta,\sigma,q)$$

$$< \frac{(3p)^{\gamma^2+\delta^2}e^{2|q|}}{(n-1)!^2}\,|\sigma|^{3p}(cd)^{6p}(3p)^{1+\gamma^2+\delta^2}\sum_{0}^{2p}{}_{\mu}\binom{2p}{\mu}\ \text{und für } p_0 > p_1(g, cd, \gamma^2+\delta^2, \sigma)$$

$$< \frac{1}{g}. \tag{13}$$

Aus (1) folgt

$$(14)\qquad u_{\nu-\lambda}(x) = \{x^{-\frac{\gamma}{c}}\,\mathfrak{D}_x x^{1+\frac{\gamma}{c}-\frac{\delta}{d}}\,\mathfrak{D}_x x^{\frac{\delta}{d}}\}^{\lambda}\,u_\nu(x) \qquad \left\{\begin{matrix}\nu = 1, 2, \ldots \\ \lambda = 0, 1, \ldots, \nu-1\end{matrix}\right\},$$

also nach (9)

$$\sum_{p+n}^{2p+n-1}{}^{\nu} S_\nu(x) = \sum_{p+n}^{2p+n-1}{}^{\nu} \sum_{0}^{2p<\mu+\nu}{}^{2p}{}^{\mu} g_\mu\, u_{\mu+\nu-2p}(x) \qquad \text{und nach (14) mit } \lambda = 1, \ldots, p$$

$$= \sum_{1}^{p}{}^{\lambda} \{x^{-\frac{\gamma}{c}}\,\mathfrak{D}_x x^{1+\frac{\gamma}{c}-\frac{\delta}{d}}\,\mathfrak{D}_x x^{\frac{\delta}{d}}\}^{\lambda-1} \sum_{0}^{2p}{}^{\mu} g_\mu\, u_{\mu+n-1}(x) \text{ und nach (1, 7)}$$

$$= \sum_{1}^{p}{}^{\lambda} \{x^{-\frac{\gamma}{c}}\,\mathfrak{D}_x x^{1+\frac{\gamma}{c}-\frac{\delta}{d}}\,\mathfrak{D}_x x^{\frac{\delta}{d}}\}^{\lambda-1} \sum_{0}^{2p}{}^{\mu} \binom{2p}{\mu} \sigma^{2p-\mu}(-\tau)^\mu x^{\mu+n-1} \cdot \frac{(cd)^{4p+2n}}{(n-1)!^2}$$

$$= \frac{(cd)^{4p+2n}}{(n-1)!^2} \sum_{1}^{p}{}^{\lambda} \{x^{-\frac{\gamma}{c}}\,\mathfrak{D}_x x^{1+\frac{\gamma}{c}-\frac{\delta}{d}}\,\mathfrak{D}_x x^{\frac{\delta}{d}}\}^{\lambda-1} (\sigma-\tau x)^{2p} x^{n-1}$$

$$\equiv 0 \bmod (\sigma-\tau x)^{2p+2-2\lambda}$$

$$(15)\qquad \equiv 0 \bmod (\sigma-\tau x),$$

insbesondere also $\sum_{p+n}^{2p+n-1}{}^{\nu} S_\nu(q) = 0$.

Aus (2—13) folgt die Näherungsform

$$0 \leqq |S\,\xi - H| < \frac{1}{g}.$$

Nach (8′, 11) wird sie aber sogar zur eigentlichen Näherungsform und läßt nach § 5 auf irrationales ξ schließen, falls

$$(16)\qquad 0 < |\xi|$$

gültig ist.

Es bleibt der durch (4) ausgeschlossene Fall

$$(4')\qquad d = 1$$

nachzutragen, und wir werden ihn erledigen, ohne die Annahme (16) zu bedürfen, womit beiläufig die bei 7. 15. 16 und in Satz 2 vorweggenommene Aussage über die Nullstellen der Zylinderfunktionen 7. 1′ gewonnen ist. O. B. kann dann statt (1) die Reihe

$$(17)\qquad \xi_k = \xi_k(q) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{q^\nu}{\nu!\,(\nu+k)!} = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} u_\nu \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

betrachtet werden; doch müssen zum Beweis unterschieden werden:

1. Fall. $k = 0$.

Mit $\left\{\begin{matrix} n > 1 \\ \mu = 0, \ldots, 2n-2\end{matrix}\right\}$ sei

$$g_{\mu,0} = \left[\frac{(n+\mu)!}{(n-1)!}\right]^2 \binom{2n-2}{\mu} \sigma^{2n-\mu}(-\tau)^{\mu+1};$$

dann ist entsprechend (15)

$$\sum_{0}^{2n-2}{}^{\mu} \sum_{2n}^{3n-2}{}^{\nu} g_{\mu,0}\, u_{\mu+\nu+2-2n} = 0;$$

für $n > n_0(g', \sigma, \tau)$ ist

$$|R| = \left| \sum_{0}^{2n-2}{}^{\mu} \sum_{3n-1}^{\infty}{}^{\nu} g_{\mu,0}\, u_{\mu+\nu+2-2n} \right| < \frac{1}{g'};$$

identisch in q gilt

$$\sum_{0}^{2n-2}{}^{\mu} \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} g_{\mu,0}\, u_{\mu+\nu+2-2n} = \xi_0(q) \sum_{0}^{2n-2}{}^{\mu} g_{\mu,0},$$

und für $n = p > \sigma^2 \tau g'$ ist

$$H = \sum_{0}^{2n-2}{}^{\mu} \sum_{2n-1-\mu}^{2n-1}{}^{\nu} g_{\mu,0}\, u_{\mu+\nu+2-2n} \equiv g_{n-1,0}\, u_n \not\equiv 0 \ (p^2)$$

$$\equiv 0 \ (1)$$

zugleich mit

$$S = \sum_{0}^{2n-2}{}^{\mu} g_{\mu,0} \equiv 0 \ (p^2),$$

woraus wie in § 5

$$(18) \qquad 0 < |\xi_0(q)\, S - H| < \frac{1}{g'},$$

d. h. die Irrationalität von $\xi(q)$ folgt, ohne wie in (16) die Nullstellen von ξ auszunehmen.

2. Fall. $k > 0$.

Mit $\mu = 0, \ldots, 2n-2$ sei

$$g_{\mu,k} = \frac{(n-k+\mu)!\,(n+\mu)!}{(n-1)!^2} \binom{2n-2}{\mu} \sigma^{2n-\mu}(-\tau)^{\mu},$$

so ist

$$\sum_{0}^{2n-2}{}^{\mu} g_{\mu,k} \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} u_{\mu+\nu+2-2n} = \xi_k \sum_{0}^{2n-2}{}^{\mu} g_{\mu,k}$$

und mit $\mu + \nu > 2n-2$

$$\sum_{0}^{2n-2}{}^{\mu} g_{\mu,k} \sum_{2n-k}^{3n-2-k}{}^{\nu} u_{\mu+\nu+2-2n} = 0.$$

Für $n > n_1(g'', \sigma, \tau, k)$ wird

$$\left| \sum_{0}^{2n-2}{}^{\mu} g_{\mu,k} \sum_{3n-1-k}^{\infty}{}^{\nu} u_{\mu+\nu+2-2n} \right| < \frac{1}{g''},$$

und mit dem Ansatz

$$\sum_{0}^{2n-2}{}^{\mu} g_{\mu,k} = S, \quad \sum_{k}^{2n-2}{}^{\mu} g_{\mu,k} \sum_{2n-1-\mu}^{2n-1-k}{}^{\nu} u_{\mu+\nu+2-2n} = H$$

findet man für primzahliges $n + k = p > g''\sigma^2\tau$

$$S \equiv 0 \ (p),$$

aber

$$H \equiv g_{n-1+2k,k}\, u_{n+k}$$

$$\equiv \left[\frac{(2n-1+k)!}{(n-1)!\,(n+k)!}\right]\left[\frac{(2n-1+2k)!}{(n+2k)!\,(n-1)!}\right]\binom{2n-2}{n-1+2k}\sigma^{2n+1-k}\tau^{k-1}(-1)^{n-1}$$

$$\not\equiv 0 \ (p)$$

$$\equiv 0 \ (1)$$

und nach *Hilbert*

$$0 < |\xi_k S - H| < \frac{1}{g''} \tag{18'}$$

wieder unabhängig von (16).

Weil die Reihen (17) für rationales q nicht den rationalen Wert Null annehmen, gilt nach 7. 1′. 2 das Gleiche auch für die Reihe 7. 2, so daß unser Satz 2 sich auf die jetzigen Ergebnisse (18, 18′) stützt, dafür aber nur das Durchsichtigere

$$S \not\equiv 0, \quad H \equiv 0 \ (p)$$

in Anspruch nahm, statt

$$S \equiv 0, \quad H \not\equiv 0 \ (p).$$

Nachzutragen bleibt der seit (7′) angewandte arithmetische

Hilfss. 8. Vor.: $a \equiv a \equiv 0 \ (1)$.

Beh.: $$\prod_{1}^{n}{}_{\varrho} \frac{a^2\varrho + aa}{\varrho} \equiv 0 \ (1).$$

Bew.: Trivial sind die Fälle $aa = 0$, sei also $a^2 a^2 > 0$. Setzen wir $n! = \prod_i p_i^{\varepsilon_i}$ in Primfaktoren zerlegt, so ist

$$e_i = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \left[\frac{n}{p_i^\lambda}\right] \leqq \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{n}{p_i^\lambda} = \frac{n}{p_i - 1} \leqq n. \tag{19, 20}$$

Denken wir ebenso den Zähler in Primzahlpotenzen gespalten:

$$\prod_{1}^{n}{}_{\varrho} |a^2\varrho + aa| = \prod_i p_i^{\varepsilon_i} \tag{21}$$

so genügt es, (22) $e_i \leqq \varepsilon_i$ zu zeigen. Für die p_i bestehen 2 Möglichkeiten; für p_1 gelte etwa

$$a \equiv 0 \ (p_1).$$

Nach (20) ist dann $e_1 \leqq n$ und nach (21) $\varepsilon_1 \geqq n$, somit gilt (22). Für eine andere Primzahl p_2 sei $(a, p_2) = 1$.
Dann folgt aus (21, 19)

$$\varepsilon_2 \geqq \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \left[\frac{n}{p_2^\lambda}\right] = e_2 \qquad \text{oder (22).}$$

Bemerkung: Für die Zwecke des § 9 hätte es genügt, durch Anwendung eines Satzes von *Eisenstein* [vgl. etwa *Nielsen*: „Funktionentheorie"] die Existenz einer ganzen Zahl $b = b(a, a)$ festzustellen, so daß ganz wird:

$$b^n \prod_{1}^{n}{}_{\varrho} \frac{\varrho + \frac{a}{a}}{\varrho} \equiv 0 \ (1);$$

unser Ergebnis, daß $b = a^2$ genommen werden kann, ist für § 10 von Belang. Das bisher Entwickelte gibt den

Satz 4. Vor.: $0 < cd \equiv c \equiv d \equiv \gamma \equiv \delta \equiv 0 \ (1)$; $\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}$ nicht negativ ganz;

$$\xi = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \prod_{1}^{\nu}{}_{\varrho} \frac{q}{\left(\varrho + \frac{\gamma}{c}\right)\left(\varrho + \frac{\delta}{d}\right)}; \tag{23}$$

$$0 < \xi^2 \quad \text{oder} \quad c^2 d^2 = 1 .$$

Beh.: ξ ist irrational.

Von Interesse ist noch, ob die mit (5) einsetzenden arithmetischen Hilfsmittel von *Dirichlet* und *Hilbert* durch analytische Methoden ersetzbar sind; um diese anzubahnen braucht man

Hilfss. 9. Vor.: (1, 7, 9); $\quad \nu = 2p + n,\ 2p + n + 1, \ldots$

$$0 < x^2 \leqq q^2, \qquad p > p_2\left(\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right).$$

Beh.: $0 < |S_\nu(x)|$.

Bew.: Nach (14) besteht für unsere Zeiger ν zwischen den $S_\nu(x)$ der differentielle Zusammenhang:

$$S_{\nu-1}(x) = \left\{x^{-\frac{\gamma}{c}} \mathfrak{D}_x x^{1+\frac{\gamma}{c}-\frac{\delta}{d}} \mathfrak{D}_x x^{\frac{\delta}{d}}\right\} S_\nu(x) . \tag{24}$$

Ihm entnehmen wir vermöge Hilfss. 1 und 2 die Nullstellenfreiheit aller $S_\nu(x)$ im links offenen Intervall $0 < x^2 \leqq q^2$ auf indirektem Wege: Wäre nämlich $0 < x_1^2 \leqq q^2$ und $S_\nu(x_1) = 0$, so gäbe es nach (24), Vor. und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein x_2, so daß $0 < x_2^2 < x_1^2$ und $S_{\nu-1}(x_2) = 0$, wodurch man schrittweise bis zu $S_{2p+n-1}(x)$ gelangt, das nach (1, 7, 9) nur in den Intervallrändern $\left\{\begin{matrix} x = 0 \\ x = q \end{matrix}\right\}$ verschwindet; aus dem Widerspruch folgt Hilfss. 9.

Verlangen wir jetzt insbesondere positive Argumente $0 < q$, so wird für $0 < x \leqq q$ nach Hilfss. 9

$$0 < |S_\nu(x)| ,$$

aber wegen (1, 7, 9) sogar schärfer

$$0 < S_\nu(x)$$

und speziell

$$0 < S_\nu(q) ,$$

was über ν summiert wegen (13) zu

$$0 < |\xi S - H| < \frac{1}{g}$$

führt.

Es kann also in der Vor. von Satz 4 statt der Forderungen (23) auch eingesetzt werden

$$0 < \sigma. \tag{23'}$$

Um auch für negative Argumente die Restschätzung nach unten durchführen zu können, muß etwas weiter ausgeholt werden:

Um den Rest (13) geschlossen darzustellen, benutzen wir *Eulers*che Integrale; für $\lambda = 0, 1, \ldots;\ \mu = 0, \ldots, 2p;\ n > \gamma^2 + \delta^2$ gilt

$$\prod_{n+\mu}^{n+\mu+\lambda} \frac{1}{\left(\varrho + \frac{\gamma}{c}\right)\left(\varrho + \frac{\delta}{d}\right)} = \frac{1}{\lambda!^2} \int_0^1 ds \cdot s^{n+\mu-1+\frac{\gamma}{c}} (1-s)^\lambda \int_0^1 dt \cdot t^{n+\mu-1+\frac{\delta}{d}} (1-t)^\lambda . \tag{25}$$

Mit $\frac{(cd)^{4p+2n}\sigma^{2p}}{(n-1)!^2} = C$ wird nach (1, 7, 9)

$$S_{2p+n+\lambda}(q) = C\sum_0^{2p}\binom{2p}{\mu}(-1)^\mu \frac{q^{n+\lambda}}{\prod_{n+\mu}^{n+\mu+\lambda}\left(\varrho+\frac{\gamma}{c}\right)\left(\varrho+\frac{\delta}{d}\right)}$$

und nach (25)

$$= \frac{C q^{n+\lambda}}{\lambda!^2}\int_0^1 ds\int_0^1 dt\,\{(1-s)(1-t)\}^\lambda s^{n-1+\frac{\gamma}{c}} t^{n-1+\frac{\delta}{d}} \sum_0^{2p}\binom{2p}{\mu}(-st)^\mu$$

$$(26)\quad = C q^n \int_0^1 ds\int_0^1 dt\,\frac{\{q(1-s)(1-t)\}^\lambda}{\lambda!^2} s^{n-1+\frac{\gamma}{c}} t^{n-1+\frac{\delta}{d}} (1-st)^{2p}.$$

Bestimmen wir die reelle Zahl $\bar{q}$ eindeutig aus

$$(27)\qquad \sum_0^\infty \frac{\bar{q}^\lambda}{\lambda!^2} = 0$$

und $-2 < \bar{q} < -1$, so gilt für $\bar{q} < q < \infty$ immer

$$(23'')\qquad \left|\sum_0^\infty \frac{q^\lambda}{\lambda!^2}\right| > 0$$

und a fortiori für $0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$

$$\left|\sum_0^\infty \frac{\{q(1-s)(1-t)\}^\lambda}{\lambda!^2}\right| > 0;$$

nach (13, 26, 27) wird so

$$|R| = \left|\sum_0^\infty S_{2p+n+\lambda}(q)\right|$$

$$= C|q|^n \int_0^1 ds\int_0^1 dt\cdot s^{n-1+\frac{\gamma}{c}} t^{n-1+\frac{\delta}{d}}(1-st)^{2p}\left|\sum_0^\infty \frac{\{q(1-s)(1-t)\}^\lambda}{\lambda!^2}\right|$$

und für (23'') wegen $\bar{q} < q < \infty$

> 0.

Zusammenfassend stellen wir fest: Der Verzicht auf *Dirichlet-Hilbert*sche Beweismittel erlaubt, den Satz 4 zu beweisen, wenn dessen Vor. (23) ff. ergänzt wird durch die Abgrenzung

$$\bar{q} < q < \infty.$$

§ 10. Hypergeometrische Reihen.

Indem wir vom Grenzfall des § 9 zu allgemeinen hypergeometrischen Reihen weiterschreiten, benötigen wir neben Hilfss. 8 noch den folgenden

Hilfss. 10. Vor.: $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) < n;\quad \lambda = 0, \ldots, n;\quad 0 < \varepsilon;$

(1) $$V = \prod_p^{<2n} p^{\left[\frac{\log(2n+1)}{\log p}\right]};\quad \nu < n+\lambda+1.$$

(2) Beh.: $$\frac{V}{\binom{n+\lambda}{\nu}} \equiv 0\ (1),$$

(3) $$V < e^{2n(1+\varepsilon)}.$$

Bew.: $\binom{n+\lambda}{\nu} = \prod_p^{<2n} p^{\sum_1^\infty i\left[\frac{n+\lambda}{p^i}\right]-\left[\frac{n+\lambda-\nu}{p^i}\right]-\left[\frac{\nu}{p^i}\right]} < \prod_p^{<2n} p^{\sum_1^{p^i<2n+1} 1} < \prod_p^{<2n} p^{\left[\frac{\log(2n+1)}{\log p}\right]}$,

und da die Primzahlpotenzen dieses Nenners von (2) nie größere Exponenten haben als die entsprechenden des Zählers V, so ist der Quotient (2) ganz; die Ungleichung (3) folgt mit Hilfe des Primzahlsatzes.

Mit den Parametern

$$0 < a^2c^2 \equiv a \equiv c \equiv \alpha \equiv \gamma \equiv 0 \quad (1)$$

werde erst die folgende spezialisierte hypergeometrische Reihe gebildet:

(4) $$\xi = \sum_1^\infty q^\nu \prod_1^\nu \frac{\varrho + \frac{a}{a}}{\varrho + \frac{\gamma}{c}},$$

und dabei sei

(5) $$\frac{\gamma}{c} \neq -1, -2, \ldots .$$

Für $\nu = 1, 2, \ldots$ sei kurz

(6) $$\prod_1^\nu \left(\varrho + \frac{a}{a}\right) = A_\nu, \qquad \prod_1^\nu \left(\varrho + \frac{\gamma}{c}\right) = C_\nu, \qquad q^\nu \frac{A_\nu}{C_\nu} = u_\nu(q);$$

dann erklären wir für $\mu = 0, 1, \ldots, n$ nach (1):

(7) $$g_\mu = \frac{V(ac^2)^{2n}}{(n-1)!\ n!} \frac{A_{n+1}}{} \binom{n}{\mu} \sigma^{n-\mu}(-\tau)^\mu \frac{C_{n+\mu}}{A_{1+\mu}},$$

(8) $$\sum_0^n{}^\mu g_\mu = S,$$

(9) $$\sum_0^n{}^\mu g_\mu u_{\mu+\nu-n}(q) = S_\nu(q) \qquad \text{mit } n < \mu + \nu,$$

(10) $$\sum_1^n{}^\nu S_\nu(q) = H,$$

(11) $$\sum_{2n+1}^\infty{}^\nu S_\nu(q) = R$$

und finden nach (1, 6, 7) und Hilfss. 8:

$$S = V \sum_0^n{}^\mu \sigma^{n-\mu}(-\tau)^\mu \left[\frac{A_{n+1}a^{2n}}{A_{\mu+1}(n-\mu)!}\right]\left[\frac{C_{n+\mu}c^{4n}}{(n-1)!\,\mu!}\right]$$

$$= V \sum_0^n{}^\mu \sigma^{n-\mu}(-\tau)^\mu \left[\prod_1^{n-\mu}{}^\varrho \frac{a^2(\mu+1+\varrho)+a\alpha}{\varrho}\right]\left[\prod_1^{n+\mu}{}^\varrho \frac{c^2\varrho + c\gamma}{\varrho}\right]\binom{n+\mu}{n}$$

$$\cdot\, n a^{2\mu} c^{2n-2\mu}$$

(8′) $$\equiv 0 \ (1);$$ nach (9, 10):

$$H = \sum_0^n{}^{\mu} g_\mu \sum_{n+1-\mu}^n{}^{\nu} u_{\mu+\nu-n} \qquad \text{und nach (6)}$$

$$= \sum_1^n{}^{\mu} g_\mu \sum_{n+1-\mu}^n{}^{\nu} \frac{A_{\mu+\nu-n}}{C_{\mu+\nu-n}} q^{\mu+\nu-n} \qquad \text{und nach Hilfss. 8}$$

$$= \sum_1^n{}^{\mu} (-1)^\mu \sum_{n+1-\mu}^n{}^{\nu} \left[\frac{C_{\mu+n} c^{4n}}{C_{\mu+\nu-n}\,(2n-\nu)!}\right]\left[\frac{A_{\mu+\nu-n} A_{n+1} a^{2n}}{A_{\mu+1}(n-\mu)!\,(\mu+\nu-n)!}\right]$$
$$\cdot \frac{(2n-\nu)!\,(\mu+\nu-n)!}{(n-1)!\,\mu!} V \sigma^\nu \tau^{n-\nu}$$

$$= \sum_1^n{}^{\mu} (-1)^\mu \sum_{n+1-\mu}^n{}^{\nu} \left[\prod_1^{2n-\nu}{}^{\varrho} \frac{c^2(\mu+\nu+\varrho-n)+c\gamma}{\varrho}\right]\left[\frac{A_{1+n}}{A_{1+\mu}(n-\mu)!} a^{2n} \frac{A_{\mu+\nu-n}}{(\mu+\nu-n)!}\right]$$
$$\frac{(c^2\sigma)^\nu \tau^{n-\nu} V}{(n-1)!\,\mu!}$$
$$\frac{}{(2n-\nu)!\,(\mu+\nu-n)!}$$

$$= \sum_1^n{}^{\mu} (-1)^\mu \sum_{n+1-\mu}^n{}^{\nu} \left[\prod_1^{2n-\nu}{}^{\varrho} \frac{c^2(\mu+\nu+\varrho-n)+c\gamma}{\varrho}\right]\left[\prod_1^{\mu+\nu-n}{}^{\varrho} \frac{a^2\varrho + a\alpha}{\varrho}\right]$$
$$\cdot \left[\prod_1^{n-\mu}{}^{\varrho} \frac{a^2(\mu+1+\varrho)+a\alpha}{\varrho}\right]\left[\frac{V}{\binom{n+\mu}{2n-\nu}}\right](c^2\sigma)^\nu (a^2\tau)^{n-\nu}(n+\mu)\binom{n+\mu-1}{\mu}$$

$$\equiv 0 \ (1); \qquad (10')$$

$$|R| = \left|\sum_{2n+1}^\infty{}^{\nu} S_\nu(q)\right|, \qquad \text{nach (9):}$$

$$\leqq \sum_0^n{}^{\mu} |g_\mu| \sum_{2n+1}^\infty{}^{\nu} |u_{\mu+\nu-n}(q)|, \qquad \text{nach (6, 7):}$$

$$= \frac{|A_{n+1}|}{n!} (a^2c^4)^n V \sum_0^n{}^{\mu} \binom{n}{\mu} |\sigma|^{n-\mu}\tau^\mu \left|\frac{C_{n+\mu}}{A_{1+\mu}(n-1)!}\right| \sum_{2n+1}^\infty{}^{\nu} \left|\frac{A_{\mu+\nu-n}}{C_{\mu+\nu-n}}\right| |q|^{\mu+\nu-n},$$

für $n > n_0(\alpha, \gamma)$:

$$< (n+1+a^2)^{|\alpha|} |\sigma a^2 c^4|^n V \sum_0^n{}^{\mu} \binom{n}{\mu}\binom{n+\mu}{n-1} n^{2(\alpha^2+\gamma^2)}$$
$$\cdot \sum_{2n+1}^\infty{}^{\nu} (\mu+\nu-n)^{2(\alpha^2+\gamma^2)} |q|^{\nu-n}, \qquad \text{für } n_0 > n_1(\alpha, \gamma):$$

$$< n^{5(1+\alpha^2+\gamma^2)} (\sigma a^2 c^4 q)^n V \sum_0^n{}^{\mu} \binom{n}{\mu}\binom{2n}{n} \sum_{2n+1}^\infty{}^{\nu} (\nu-2n)^{2(\alpha^2+\gamma^2)} |q|^{\nu-2n},$$

für $n_1 > n_2(\alpha, \gamma, q)$:

$$< n^{6(1+\alpha^2+\gamma^2)} \left(\frac{4\sigma^2 a^2 c^4}{\tau}\right)^n V \sum_0^n{}^{\mu} \binom{n}{\mu}, \qquad \text{nach Hilfss. 10 für } n_2 > n_3(\varepsilon):$$

$$< n^{6(1+\alpha^2+\gamma^2)} \left\{\frac{8\sigma^2 a^2 c^4 e^{2(1+\varepsilon)}}{\tau}\right\}^n, \qquad \text{für } n_3 > n_4(\varepsilon, \alpha, \gamma):$$

$$< \left\{\frac{8\sigma^2 a^2 c^4 e^{(2+3\varepsilon)}}{\tau}\right\}^n, \qquad \text{für } n_4 > n_5(g, \varepsilon):$$

(11′) $$< \frac{1}{g},$$

falls $|q|$ so klein ist, daß die Beziehung gilt:

(12) $$8 e^2 a^2 c^4 \sigma^2 < \tau.$$

Für $\nu = n+1, \ldots, 2n-1$ besteht zwischen den Polynomen $S_\nu(xy)$ der Zusammenhang

$$x^{1-\frac{a}{a}} \mathfrak{D}_x x^{1+\frac{a}{a}} S_\nu(xy) = \sum_0^n{}^{\mu} g_\mu \prod_1^{\mu+\nu+1-n}{}^{\varrho} x\left(\varrho + \frac{a}{a}\right) \prod_1^{\mu+\nu-n}{}^{\varrho} \frac{y}{\left(\varrho + \frac{\gamma}{c}\right)}$$

$$= y^{-\frac{\gamma}{c}} \mathfrak{D}_y y^{\frac{\gamma}{c}} S_{\nu+1}(xy),$$

somit für $\left\{ \begin{array}{l} n > -2 - \frac{a}{a} \\ \lambda = 0, \ldots, n-1 \end{array} \right\}$

$$S_{2n-\lambda}(xy) = \{y^{-\frac{\gamma}{c}} \mathfrak{D}_y y^{\frac{\gamma}{c}}\}^\lambda \{x^{1-\frac{a}{a}} \mathfrak{D}_x x^{1+\frac{a}{a}}\}^{-\lambda} S_{2n}(xy) \qquad \text{und nach (9)}$$

$$\sum_0^{n-1}{}^{\lambda} S_{2n-\lambda}(xy) = \sum_0^{n-1}{}^{\lambda} \{y^{-\frac{\gamma}{c}} \mathfrak{D}_y y^{\frac{\gamma}{c}}\}^\lambda \{x^{1-\frac{a}{a}} \mathfrak{D}_x x^{1+\frac{a}{a}}\}^{-\lambda} \sum_0^n{}^{\mu} g_\mu u_{n+\mu}(xy)$$

und nach (7)

$$= \sum_0^{n-1}{}^{\lambda} \{y^{-\frac{\gamma}{c}} \mathfrak{D}_y y^{\frac{\gamma}{c}}\}^\lambda \{x^{1-\frac{a}{a}} \mathfrak{D}_x x^{1+\frac{a}{a}}\}^{-\lambda} \sum_0^n{}^{\mu} \prod_{\mu+2}^{\mu+n}{}^{\varrho} \left(\varrho + \frac{a}{a}\right) (xy)^{n+\mu}$$

$$\cdot \binom{n}{\mu} \sigma^{n-\mu} (-\tau)^\mu \frac{V A_{n+1} (a c^2)^{2\mu}}{(n-1)!\, n!}$$

$$= \frac{V A_{n+1} (a c^2)^{2n}}{(n-1)!\, n!} \sum_0^{n-1}{}^{\lambda} \{y^{-\frac{\gamma}{c}} \mathfrak{D}_y y^{\frac{\gamma}{c}}\}^\lambda \{x^{1-\frac{a}{a}} \mathfrak{D}_x x^{1+\frac{a}{a}}\}^{n-\lambda-1}$$

$$\cdot (\sigma - \tau xy)^n y^n x \qquad \text{und nach Hilfss. 2}$$

$$= 0 \mod (\sigma - \tau xy)^{n-\lambda-(n-\lambda-1)}$$

$$= 0 \mod (\sigma - \tau xy); \qquad \text{insbesondere}$$

(13) $$\sum_{n+1}^{2n}{}^{\nu} S_\nu(q) = 0.$$

Nach (4, 8, 10, 11, 8′, 10′, 11′, 13) stellt jetzt

$$|\xi S - H| = |R| < \frac{1}{g}$$

für die Argumente (12) eine uneigentliche Näherungsform dar, und der Irrationalitätsschluß kann durch Restschätzung nach unten ähnlich wie zu Ende des § 9 gezogen werden, vermöge einer Darstellung von (11) durch bestimmte Integrale.

Zugleich leistet diese Integraldarstellung eine neue Abschätzung des Restes $|R|$ nach oben, die feiner als (11′) arbeitet und damit den Bereich (12) brauchbarer Argumente ziemlich erweitert. Es sei von jetzt ab

(12′) $$\left(\frac{1}{2 e a c^2} + \sigma \frac{e a c^2}{2}\right)^2 < \tau.$$

Wegen (6) gilt für $\left|\frac{\gamma}{c}\right| < n$ und $\nu = 2n+1, 2n+2, \ldots$

$$\frac{C_{\mu+n}}{C_{\mu+\nu-n}} = \frac{1}{(\nu-2n-1)!}\int_0^1 dx \cdot x^{\mu+n+\frac{\gamma}{c}}(1-x)^{\nu-2n-1};$$

mit den Kürzungen

$$(14) \qquad C = \left\{\frac{a^2c^4\sigma^2}{\tau}\right\}^n \frac{VA_{n+1}}{(n-1)!\,n!}, \quad \zeta = \frac{a}{a} - \frac{\gamma}{c} \qquad \text{folgt nach (6, 7, 9)}$$

$$S_\nu(q) = C\sum_0^{n'}{}^{\mu} g_\mu u_{\mu+\nu-n} C^{-1}$$

$$= C\sum_0^n{}^{\mu} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} \sigma^{n-\mu}\tau^\mu \frac{C_{n+\mu}}{A_{1+\mu}} \frac{A_{\mu+\nu-n}}{C_{\mu+\nu-n}} q^{\mu+\nu-n} \left(\frac{\tau}{\sigma^2}\right)^n$$

$$= \frac{Cq^{\nu-2n}}{(\nu-2n-1)!}\sum_0^n{}^{\mu} (-1)^\mu \binom{n}{\mu}\int_0^1 dx \cdot x^{\mu+n+\frac{\gamma}{c}}(1-x)^{\nu-2n-1}$$

$$(14') \qquad \cdot\left(\frac{a}{a}+\mu+2\right)\cdots\left(\frac{a}{a}+\mu+\nu-n\right)$$

$$= \frac{Cq^{\nu-2n}}{(\nu-2n-1)!}\sum_0^n{}^{\mu} (-1)^\mu \binom{n}{\mu}\prod_{\mu+2}^{\mu+\nu-n}{}^{\varrho}\left(\varrho+\frac{a}{a}\right)\int_0^1 dx \cdot x^{\mu+\nu-n-1+\frac{a}{a}}$$

$$\cdot x^{2n+1-\nu-\zeta}(1-x)^{\nu-2n-1}$$

$$= \frac{Cq^{\nu-2n}}{(\nu-2n-1)!}\int_0^1 dx\,(1-x)^{\nu-2n-1}x^{2n+1-\nu-\zeta}\{\mathfrak{D}_x x^2\}^{\nu-n-1}$$

$$\cdot\sum_0^n{}^{\mu} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} x^{\frac{a}{a}+\mu} \quad \text{und mit } \nu-2n-1=\omega$$

$$= \frac{Cq^{\omega+1}}{\omega!}\int_0^1 dx\,(1-x)^\omega x^{-\omega-\zeta}\{\mathfrak{D}_x x^2\}^{n+\omega} x^{\frac{a}{a}}(1-x)^n.$$

Da der Integrand für $0 < x < 1$ Vorzeichenwechsel erleiden kann, an den Integrationsgrenzen aber genügend stark verschwindet, suchen wir durch Teilintegrationen zu einem „definiten" Integral zu gelangen, d. h. zu einem solchen, dessen Integrand längs des Weges sein Vorzeichen festhält; wegen

$$\{-x^2\mathfrak{D}_x\}^{\lambda-1}(1-x)^\omega x^{2-\omega-\zeta}\{\mathfrak{D}_x x^2\}^{n+\omega-\lambda} x^{\frac{a}{a}}(1-x)^n \equiv 0 \text{ mod. } (1-x) \text{ und mod. } x^{\frac{1}{|c|}}$$

$$\text{für } \left\{\begin{matrix} n+\frac{\gamma}{c} > -1 \\ \lambda = 1, \ldots, n+\omega \end{matrix}\right\}$$

verschwinden die Zusatzglieder, und es wird für $\omega = 0, 1, \ldots$

$$S_{2n+1+\omega}(q) = \frac{Cq^{1+\omega}}{\omega!}\int_0^1 dx \cdot x^{\frac{a}{a}}(1-x)^n\{-x^2\mathfrak{D}_x\}^{n+\omega}(1-x)^\omega x^{-\omega-\zeta}$$

$$= \frac{Cq^{1+\omega}}{\omega!}\int_0^1 dx \cdot x^{\frac{\gamma}{c}}(1-x)^n x^\zeta \sum_0^\omega{}^{\lambda} (-1)^{\lambda+n+\omega}\binom{\omega}{\lambda}\{x^2\mathfrak{D}_x\}^{n+\omega} x^{\lambda-\omega-\zeta}$$

$$= Cq \int_0^1 dx \cdot x^{\frac{\gamma}{c}} (1-x)^n (-q)^\omega \sum_0^\omega{}^{\lambda} (-x)^{\lambda+n} \cdot \frac{(\lambda-\omega-\zeta)\cdots(\lambda+n-\zeta-1)}{\lambda!\,(\omega-\lambda)!}$$

$$= n!\,Cq \int_0^1 dx \cdot x^{\frac{\gamma}{c}+n} (1-x)^n \sum_0^\omega{}^{\lambda} (-q)^{\omega-\lambda} (-qx)^\lambda \cdot \frac{(\lambda-\omega-\zeta)\cdots(-1-\zeta)}{(\omega-\lambda)!} \cdot \frac{\zeta(\zeta-1)\cdots(\zeta-n+1)}{n!} \cdot \frac{(\zeta-n)\cdots(\zeta-n-\lambda+1)}{\lambda!} \tag{15}$$

$$= n!\,Cq \binom{\zeta}{n} \int_0^1 dx \cdot x^{\frac{\gamma}{c}+n} (1-x)^n \sum_0^\omega{}^{\lambda} \binom{-\zeta-1}{\omega-\lambda} (-q)^{\omega-\lambda} \binom{\zeta-n}{\lambda} (-qx)^\lambda. \tag{15'}$$

Setzen wir das nicht negative

$$\omega - \lambda = \varkappa$$

und summieren (15′) über ω, so wird $\sum_0^\infty{}^{\varkappa} \sum_0^\infty{}^{\lambda} = \sum_0^\infty{}^{\omega} \sum_0^\omega{}^{\lambda}$ und

$$R = n!\,Cq \binom{\zeta}{n} \int_0^1 dx \cdot x^{\frac{\gamma}{c}+n} (1-x)^n \sum_0^\infty{}^{\varkappa} \sum_0^\infty{}^{\lambda} \binom{-\zeta-1}{\varkappa} (-q)^\varkappa \binom{\zeta-n}{\lambda} (-qx)^\lambda$$

$$= n!\,Cq \binom{\zeta}{n} \sum_0^\infty{}^{\varkappa} \binom{-\zeta-1}{\varkappa} (-q)^\varkappa \int_0^1 dx \cdot x^{\frac{\gamma}{c}+n} (1-x)^n \sum_0^\infty{}^{\lambda} \binom{\zeta-n}{\lambda} (-qx)^\lambda$$

$$= n!\,C \binom{\zeta}{n} \frac{q}{(1-q)^{\zeta+1}} \int_0^1 dx\, x^{\frac{\gamma}{c}+n} (1-x)^n (1-qx)^{\zeta-n} \tag{16}$$

$$= 0 \text{ für } \zeta = 0, 1, \ldots, n-1, \text{ aber } \neq 0 \text{ sonst.} \tag{17}$$

Aus (17) folgt Irrationalität von ξ für die Argumente (12); aus (3, 14, 16) erkennen wir, daß hiefür schon zureicht die Bedingung

$$0 < \left| \left\{ \frac{\sigma^2 a^2 c^4 e^{2(1+\varepsilon)}}{\tau} \right\}^n \binom{\zeta}{n} \frac{A_{n+1}}{n-1!} \frac{q}{(1-q)^{\zeta+1}} \int_0^1 dx \cdot x^{\frac{\gamma}{c}+n} (1-x)^n (1-qx)^{\zeta-n} \right| < \frac{1}{g}$$

und für $n_1(a, \gamma, \sigma, \varepsilon, g) = n_6 < n$ zusammen mit (17)

$$\left| \int_0^1 dx \cdot x^{\frac{\gamma}{c}+n} (1-x)^n (1-qx)^{\zeta-n} \right| < (e^{2+3\varepsilon} a^2 c^4 \sigma^2 \tau^{-1})^{-n}. \tag{19}$$

Nach *Riemann* (*R*) erreicht $\left\{ \frac{x(1-x)}{1-qx} \right\}^n$ links sein Maximum für $x = \frac{1}{1+\sqrt{1-q}}$.

so daß (19) erfüllt wird für hinreichend großes n durch

$$(1+\sqrt{1-q})^{-2} < (e^2 a^2 c^4 \sigma^2 \tau^{-1})^{-1}$$

$$e^2 a^2 c^4 \sigma^2 \tau^{-1} < 2 - q + 2\sqrt{1-q}$$

$$q^2 + (2q-4)\frac{\sigma^2}{\tau} e^2 a^2 c^4 + \frac{\sigma^4}{\tau^2} e^4 a^4 c^8 < 0,$$

mit q^2 gekürzt:

$$1 + (2\sigma - 4\tau)\, e^2 a^2 c^4 + \sigma^2 e^4 a^4 c^8 < 0$$

$$(1 + \sigma e^2 a^2 c^4)^2 < 4\tau e^2 a^2 c^4$$

$$\Big(\frac{1}{2 e a c^2} + \sigma \frac{e a c^2}{2}\Big)^2 < \tau\,,$$

d. h. genau die Forderung (12′); für $|ac| = 1$ und $\sigma > 10$ vereinfacht diese sich zu

$$2\sigma^2 < \tau\,.$$

Zusammenfassend erhalten wir im bisherigen speziellen Fall

Satz 5. Vor.: $0 < a^2 c^2 \equiv a \equiv c \equiv \alpha \equiv \gamma \equiv 0\ (1)$; $\frac{\gamma}{c} \not\equiv -1, -2, \ldots$;

$$\frac{1}{2}\sigma + 2 \cdot a^2 c^4 \sigma^2 < \tau\,.$$

Beh.:
$$\sum_1^\infty q^\nu \prod_1^\nu \frac{\varrho + \frac{\alpha}{a}}{\varrho + \frac{\gamma}{c}}$$

ist rational für $\frac{\alpha}{a} - \frac{\gamma}{c} = 0, 1, 2, \ldots$, und ist irrational sonst.

Hätte man die Vor. des Satzes 5 ergänzt durch die beiden Aussagen

(20) $$0 < q \quad \text{und} \quad -1 < \zeta$$

so könnte die Definitheit aller Integrale (15) unmittelbar verwertet werden, denn alle λ-Summanden haben dann gleiches, von ω unabhängiges Vorzeichen; für $\omega = 0, 1, \ldots$ ist so

(21) $$S_{2n+1+\omega}(q) = \frac{(-1)^{n-1} C q^{1+\omega}}{\lambda!\,(\omega - \lambda)!} \int_0^1 dx \cdot x^{\frac{\gamma}{c}} (1-x)^n$$

$$\cdot \sum_0^\omega {}^\lambda \{\zeta(\zeta+1)\cdots(\zeta+\omega-\lambda)\}\,\{(-\zeta+1)\cdots(-\zeta+\lambda+n-1)\}\, x^{\lambda+n}$$

$$= \int_0^1 dx \cdot x^{\frac{\gamma}{c}+n} (1-x)^n \sum_0^\omega {}^\lambda K_{\lambda,\omega}\, x^\lambda$$

mit $\frac{K_{\lambda,\omega}}{K_{0,0}} > 0$; somit auch

(21′) $$\frac{S_{2n+1+\omega}(q)}{S_{2n+1}(q)} > 0 \qquad \text{und}$$

$$0 < \Big| \sum_{2n+1}^\infty {}^\nu S_\nu(q) \Big|\,.$$

Nun betrachten wir die allgemeine hypergeometrische Reihe. Mit

(22) $$0 < (abc)^2 \equiv a \equiv b \equiv c \equiv \alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 0\ (1)$$

sei

(23) $$0 < 4\sigma^3\,(ab)^4 e^5 c^6 < \tau\,,$$

woraus speziell

$$0 < q < 1$$

folgt. Abkürzend schreiben wir für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$(24)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \prod_{1}^{\nu}{}_{\varrho} \left(\varrho + \frac{\alpha}{a}\right)\left(\varrho + \frac{\beta}{b}\right) = A_\nu \\ \prod_{1}^{\nu}{}_{\varrho} \left(\varrho + \frac{\gamma}{c}\right) \cdot \varrho \qquad\quad = C_\nu \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad q^\nu \frac{A_\nu}{C_\nu} = u_\nu(q) = u_\nu;$$

untersucht wird dann

$$(25)\qquad \xi = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, u_\nu .$$

Neben der durch (1) eingeführten Zahl $V = V_2$ ist noch zu bilden

$$\prod_{p}^{<3n} p^{\left[\frac{\log(3n+1)}{\log p}\right]} = V_3 ,$$

und aus den Beweisgründen von Hilfss. 10 erkennt man, daß für $\left\{ \begin{array}{l} \nu < n + \lambda + 1 \\ \lambda = 0, \ldots, 2n \end{array} \right\}$

$$(26)\qquad \frac{V_3}{\binom{n+\lambda}{\nu}} \equiv 0 \ (1)$$

gilt, und daß bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Schranke $\bar{n}(\varepsilon)$ besteht, so daß für $\bar{n} < n$ simultan

$$(27)\qquad V_i < e^{in(1+\varepsilon)}$$

mit $i = 2, 3$ gilt. Sei für $\mu = 0, 1, \ldots, 2n-1$

$$(28)\qquad g_\mu = \frac{(V_2 V_3)^2}{(3n)!^2}\, A_{2n+1}(a^2 b^2 c^3)^{2n} \binom{2n-1}{\mu} \sigma^{2n-\mu}(-\tau)^\mu \frac{C_{n+\mu}}{A_{1+\mu}} .$$

also für

$$\sum_{0}^{2n-1}{}_{\mu}\, g_\mu = S$$

nach Hilfss. 8

$$S = \sum_{0}^{2n-1}{}_{\mu}\, (-1)^\mu \binom{2n-1}{\mu} \left[\frac{C_{\mu+n} c^{6n}}{(\mu+n)!^2}\right] \left[\frac{A_{2n+1}(ab)^{4n}}{A_{\mu+1}(2n-\mu)!^2}\right] \left[\frac{(n+2\mu)!(n-\mu)!\, V_3}{(3n)!}\right]^2 \cdot V_2^2 \sigma^{2n-\mu} \tau^\mu$$

$$(29)\qquad \equiv 0 \ (1)$$

und setzt man für $2n-1 < \mu + \nu$

$$(30)\qquad \sum_{0}^{2n-1}{}_{\mu}\, g_\mu\, u_{\mu+\nu+1-2n}(q) = S_\nu(q)$$

$$(31)\qquad \sum_{1}^{2n-1}{}_{\nu}\, S_\nu(q) = H$$

$$(32)\qquad \sum_{3n}^{\infty}{}_{\nu}\, S_\nu(q) = R ,$$

so wird mit $2n-1 < \mu+\nu$

$$\xi S = \sum_{1}^{\infty_\nu} \sum_{0}^{2n-1_\mu} g_\mu u_{\mu+\nu+1-2n} = \sum_{1}^{\infty_\nu} S_\nu(q) \qquad \text{spaltbar}$$

$$(33) \qquad = H + \sum_{2n}^{3n-1_\nu} S_\nu(q) + R.$$

Nach (26, 27, 28, 30, 31) ist

$$H = \sum_{1}^{2n-1_\mu} (-1)^\mu \binom{2n-1}{\mu} \sum_{2n-\mu}^{2n-1_\nu} \left[\frac{A_{\mu+\nu+1-2n}(ab)^{4n} A_{1+2n}}{(\mu+\nu+1-2n)!^2 A_{1+\mu}(2n-\mu)!^2}\right] \cdot \left[\frac{C_{\mu+n} c^{6n}}{C_{\mu+\nu+1-2n}(3n-\nu-1)!^2}\right]\left[\frac{V_2(2n-\mu)!(\mu+\nu+1-2n)!}{(\nu+1)!}\right]^2 \cdot \left[\frac{V_3(\nu+1)!(3n-\nu-1)!}{(3n)!}\right]^2 \tau^{2n-\nu-1}\sigma^{\nu+1}$$

$$(34) \qquad \equiv 0 \ (1).$$

Nach (24, 28, 30, 32) ist

$$|R| \leqq \sum_{0}^{2n-1_\mu} |g_\mu| \sum_{3n}^{\infty_\nu} |u_{\mu+\nu+1-2n}|$$

$$= \sum_{0}^{2n-1_\mu} |g_\mu q^{\mu+1+n}| \sum_{3n}^{\infty_\nu} q^{\nu-3n} \prod_{1}^{\mu+\nu+1-2n_\varrho} \left|\frac{\left(\varrho+\frac{\alpha}{a}\right)\left(\varrho+\frac{\beta}{b}\right)}{\left(\varrho+\frac{\gamma}{c}\right)\varrho}\right|$$

und für $n > n_6(\alpha, \beta, \gamma)$

$$< q^{n+1} \sum_{0}^{2n-1_\mu} |g_\mu| q^\mu \sum_{3n}^{\infty_\nu} q^{\nu-3n}(\mu+\nu+1-2n)^{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

$$< q^{n+1} \sum_{0}^{2n-1_\mu} |g_\mu| q^\mu (3n)^{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \sum_{3n}^{\infty_\nu} q^{\nu-3n}\left(\frac{\nu}{3n}\right)^{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

$$< q^{n+1}(3n)^{(1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)} \sum_{0}^{2n-1_\mu} |g_\mu| q^\mu \sum_{3n}^{\infty_\nu} q^{\nu-3n}(\nu-3n+1)^{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

und nach (28)

$$= (V_2 V_3)^2 q^n (\sigma a^2 b^2 c^3)^{2n} \sum_{0}^{2n-1_\mu} \binom{2n-1}{\mu} \left|\frac{A_{2n+1} C_{n+\mu}}{A_{\mu+1}(3n)!^2}\right| (3n)^{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \cdot \sum_{3n}^{\infty_\nu} q^{\nu+1-3n}(\nu+1-3n)^{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

$$< (V_2 V_3)^2 (\sigma^3 a^4 b^4 c^6 \tau^{-1})^n \sum_{0}^{2n-1_\mu} \binom{2n-1}{\mu} \frac{C_{3n}}{(3n)!^2} n^{2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

für $n_6 > n_7(\alpha, \beta, \gamma, q, n)$; nach (27)

$$< \left\{\frac{4\sigma^3 a^4 b^4 e^{5(1+\varepsilon)} c^6}{\tau}\right\}^n \prod_{1}^{3n_\varrho} \frac{\varrho+\gamma^2}{\varrho} n^{2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2};$$

für $n_7 > n_8(g, \varepsilon, \alpha, \beta, \gamma)$ nach (23)

$$(35) \qquad < \frac{1}{g}.$$

Sei nun $n > \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$; $\nu = 2n,\ 2n+1, \ldots, 3n-2$

$$(36) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x^{1-\frac{a}{a}}\, \mathfrak{D}_x\, x^{1+\frac{a}{a}-\frac{\beta}{b}}\, \mathfrak{D}_x\, x^{1+\frac{\beta}{b}} & = \mathfrak{T}_1 \\ y^{-\frac{\gamma}{c}}\, \mathfrak{D}_y\, y^{1+\frac{\gamma}{c}}\, \mathfrak{D}_y & = \mathfrak{T}_2 \end{array} \right\},$$

so folgt aus (30) und (24)

$$(36') \qquad \mathfrak{T}_1 S_\nu(xy) = \mathfrak{T}_2 S_{\nu+1}(xy), \quad \text{also}$$

$$S_{3n-1}(xy) = \sum_0^{2n-1\mu} g_\mu\, u_{n+\mu}(xy) \qquad \text{und nach (28)}$$

$$= (V_2 V_3)^2\, \frac{A_{2n+1}}{(3n)!^2}\, (a^2 b^2 c^3)^{2n} \sum_0^{2n-1\mu} \binom{2n-1}{\mu} \sigma^{2n-\mu} (-\tau)^\mu (xy)^{n+\mu}\, \frac{A_{n+\mu}}{A_{1+\mu}};$$

mit $(V_2 V_3)^2\, \frac{A_{2n+1}}{(3n)!^2}\, (a^2 b^2 c^3)^{2n} = A$:

$$= A \sum_0^{2n-1\mu} \binom{2n-1}{\mu} \sigma^{2n-\mu} (-\tau)^\mu (xy)^{n+\mu} \prod_{\mu+2}^{\mu+n\varrho} \left(\varrho + \frac{a}{a}\right)\left(\varrho + \frac{\beta}{b}\right)$$

$$= A \sum_0^{2n-1\mu} \binom{2n-1}{\mu} \sigma^{2n-\mu} (-\tau)^\mu\, y^{n+\mu}\, \mathfrak{T}_1^{n-1}\, x^{1+\mu}$$

$$= A\, \mathfrak{T}_1^{n-1} (\sigma - \tau xy)^{2n-1}\, y^n x\sigma\,.$$

Nach (36′) erhält man

$$\sum_1^{n\lambda} S_{3n-\lambda}(xy) = A \sum_1^{n\lambda} \mathfrak{T}_1^{1-\lambda}\, \mathfrak{T}_2^{\lambda-1}\, S_{3n-1}(xy)\, A^{-1}$$

$$= A \sum_1^{n\lambda} \mathfrak{T}_1^{n-\lambda}\, \mathfrak{T}_2^{\lambda-1} (\sigma - \tau xy)^{2n-1}\, y^n x\sigma \qquad \text{und nach Hilfss. 2}$$

$$\equiv 0 \mod (\sigma - \tau xy)^{2n-1-2(n-\lambda)-2(\lambda-1)}$$

$$(37) \qquad \equiv 0 \mod (\sigma - \tau xy);$$

insbesondere ist also $\sum_{2n}^{3n-1\nu} S_\nu(q) = 0$; (33—37) zeigen

$$(38) \qquad |R| = |\xi S - H| < \frac{1}{g}\,.$$

Um auf Irrationalität von ξ schließen zu dürfen, muß das Nichtverschwinden von R gezeigt werden. Ausreichend dafür ist statt (21′) jetzt mit

$$(38') \qquad \omega = 1, 2, \ldots$$

die Folge von Ungleichungen

$$(38'') \qquad 0 < \frac{S_{3n-1+\omega}(q)}{S_{3n}(q)}\,,$$

zu deren Nachweis Integraldarstellungen für $S_\nu(q)$ herangezogen werden können. Es liegt nahe, die Quotienten $\frac{C_{\mu+n}}{C_{\mu+\nu+1-2n}}$ wie in 9. 25. 26 durch Doppelintegrale darzustellen, und dann die Multiplikatoren $\frac{A_{\mu+\nu+1-2n}}{A_{\mu+1}}$ wie in 10. 14′

durch Differentialoperatoren zum Ausdruck zu bringen; versucht man dann weiter die Herstellung eines definiten Integrals für die $S_{3n-1+\omega}(q)$ durch Ausübung von Teilintegrationen, so entsteht eine neue Schwierigkeit: Die Zusatzglieder verschwinden nicht an den Integrationsgrenzen und die bisher vorhandene formale Durchsichtigkeit geht verloren.

Geringeren Widerstand finden wir, wenn die folgende Darstellung, in der $\prod_j'$ den Ausfall des Zeigers $j=\gamma$ andeutet, zugrundegelegt wird; nach (24) gilt für

(39) $$0 < \gamma < c$$

$$\frac{C_{\mu+n}}{C_{\mu+\nu+1-2n}} = \prod_{\mu+n+1}^{\mu+\nu+1-2n} \frac{1}{\left(\varrho+\frac{\gamma}{c}\right)\varrho}, \qquad \text{in Zähler und Nenner erweitert}$$

und mit $\nu - 2n = \omega$:

$$= \frac{[c(\mu+n+1)-1]!\,c^{\omega c}}{[c(\mu+n+\omega+1)-1]!} \prod_{\mu+n+1}^{\mu+n+\omega} \prod_{1}^{c-1}{}' \left(\varrho+\frac{j}{c}\right)$$

(40) $$= \frac{c^{c\omega}}{(c\omega-1)!}\int_0^1 dx\,(1-x)^{c\omega-1}\,x^{(\mu+n+1)c-1} \prod_{\mu+n+1}^{\mu+n+\omega} \prod_{1}^{c-1}{}' \left(\varrho+\frac{j}{c}\right).$$

Mit der Kürzung $\dfrac{(3n)!^2(\tau\sigma^{-3}a^{-4}b^{-4}c^{-6})^n}{A_{2n+1}(V_2V_3)^2} = C$ und (24, 28, 30, 38′) wird

$$C\,S_{3n-1+\omega}(q) = \sum_0^{2n-1} \binom{2n-1}{\mu} \sigma^{-\mu}(-\tau)^\mu \frac{C_{\mu+n}}{C_{\mu+n+\omega}} \frac{A_{\mu+n+\omega}}{A_{\mu+1}} q^{\omega+\mu}$$

$$= q^\omega \sum_0^{2n-1} (-1)^\mu \binom{2n-1}{\mu} \frac{C_{\mu+n}}{C_{\mu+n+\omega}} \prod_{\mu+2}^{\mu+n+\omega} \left(\varrho+\frac{\alpha}{a}\right)\left(\varrho+\frac{\beta}{b}\right)$$

und nach (40)

$$= \frac{(q\,c^c)^\omega}{(c\omega-1)!} \sum_0^{2n-1} (-1)^\mu \binom{2n-1}{\mu} \int_0^1 dx\,(1-x)^{c\omega-1} x^{-c\omega}$$

$$\cdot\, x^{(\mu+n+\omega+1)c-1} \prod_{\mu+2}^{\mu+n} \left(\varrho+\frac{\alpha}{a}\right)\left(\varrho+\frac{\beta}{b}\right) \prod_{\mu+n+1}^{\mu+n+\omega} \left(\varrho+\frac{\alpha}{a}\right)\left(\varrho+\frac{\beta}{b}\right) \prod_1^{c-1}{}' \left(\varrho+\frac{j}{c}\right).$$

Um die über ϱ und j erstreckten Produkte durch Differentiationen entstehen zu lassen, sind c Operatoren einzuführen:

(41)
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{c}\,x^{-\frac{a\,c}{a}}\,\mathfrak{D}_x\,x^{1+\frac{a\,c}{a}} = \mathfrak{W}_a \\ &\frac{1}{c}\,x^{c-\frac{\beta\,c}{b}}\,\mathfrak{D}_x\,x^{1+\frac{\beta\,c}{b}} = \mathfrak{W}_b \\ &\frac{1}{c}\,x^{-j}\,\mathfrak{D}_x\,x^{1+j} \quad = \mathfrak{W}_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, \gamma-1, \gamma+1, \ldots, c-1 \end{aligned}\right\};$$

nur $\mathfrak{W}_b$ verändert den Exponenten einer dahinterstehenden Potenz von x und zwar erhöht sich dieser genau um c Einheiten. Es wird

$$C\,S_{3n-1+\omega}(q) = \frac{(q\,c^c)^\omega}{(c\omega-1)!} \sum_0^{2n-1} (-1)^\mu \binom{2n-1}{\mu} \int_0^1 dx\,(1-x)^{c\omega-1} x^{-c\omega}$$

$$\cdot \{\mathfrak{W}_b\,\mathfrak{W}_a \prod_1^{c-1}{}' \mathfrak{W}_j\}^\omega \{\mathfrak{W}_b\,\mathfrak{W}_a\}^{n-1} x^{(\mu+2)c-1}$$

$$= \frac{(q\,c^c)^\omega}{(c\omega-1)!}\int_0^1 dx\,(1-x)^{c\omega-1}\,x^{-c\omega}\{\mathfrak{W}_b\,\mathfrak{W}_a\prod_j{}'\,\mathfrak{W}_j\}^\omega$$

$$\cdot\{\mathfrak{W}_b\,\mathfrak{W}_a\}^{n-1}\,x^{2c-1}\sum_0^{2n-1}{}^\mu\binom{2n-1}{\mu}(-x^c)^\mu$$

$$= \frac{(q\,c^c)^\omega}{(c\omega-1)!}\int_0^1 dx\,(1-x)^{c\omega-1}\,x^{-c\omega}\,\{\mathfrak{W}_b\,\mathfrak{W}_a\prod_j{}'\,\mathfrak{W}_j\}^\omega\,\{\mathfrak{W}_b\,\mathfrak{W}_a\}^{n-1} \tag{42}$$

$$\cdot\,x^{2c-1}\,(1-x^c)^{2n-1};$$

denn die Operatoren (41) und deren Zusammensetzungen sind linear (vgl. 3. 7‴), so daß $\sum^\mu \mathfrak{W} = \mathfrak{W}\sum^\mu$ vertauschbar ist. Im Gegensatz zur oben berührten Darstellung durch Doppelintegrale gelingt die Umformung von (42) in einen definiten Ausdruck mittels Teilintegration unter Wegfall störender Zusatzglieder, denn nach Hilfss. 2 wird die Nullstelle des Integranden im Punkt $x = 1$ von der Vielfachheit $c\omega + 2n - 2$ um genau ebenso viele Einheiten gesenkt; bei jeder Teilintegration wird im Zusatzglied genau eine Differentiation rückgängig gemacht, so daß die Existenz einer einfachen Nullstelle sicher steht; ähnlich schließt man für $x = 0$.

Wie zwischen (14′) und (15) statt $\mathfrak{T} = \{\mathfrak{D}_x x^2\}$ der neue Operator $\overline{\mathfrak{T}} = \{-x^2\mathfrak{D}_x\}$ entstand, so erklären wir neben (41) die c weiteren Operatoren:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{c}\,x^{1+\frac{\beta c}{b}}\,\mathfrak{D}_x\,x^{c-\frac{c\beta}{b}} = \overline{\mathfrak{W}}_b & \\ \frac{1}{c}\,x^{1+\frac{ac}{a}}\,\mathfrak{D}_x\,x^{-\frac{ac}{a}} = \overline{\mathfrak{W}}_a & \\ \frac{1}{c}\,x^{1+j}\,\mathfrak{D}_x\,x^{-j} = \overline{\mathfrak{W}}, & j = c-1,\ldots,\gamma+1,\gamma-1,\ldots,1 \end{array}\right\};$$

nach $c\omega + 2n - 2$ partiellen Integrationen entsteht

$$C\,S_{3n-1+\omega}(q) = \frac{(q\,c^c)^\omega}{(c\omega-1)!}\,(-1)^{c\omega}\int_0^1 dx(1-x^c)^{2n-1}x^{2c-1}\{\overline{\mathfrak{W}}_a\overline{\mathfrak{W}}_b\}^{n-1}$$

$$\cdot\left\{\prod_1^{c-1}{}_j{}'\,\overline{\mathfrak{W}}_j\overline{\mathfrak{W}}_a\overline{\mathfrak{W}}_b\right\}^\omega x^{-c\omega}(1-x)^{c\omega-1}$$

$$= \frac{(q\,c^c)^\omega}{(c\omega-1)!}\int_0^1 dx(1-x^c)^{2n-1}x^{2c-1}\sum_0^{c\omega-1}{}^\lambda\binom{c\omega-1}{\lambda}(-1)^{c\omega-\lambda}$$

$$\cdot\{\overline{\mathfrak{W}}_a\overline{\mathfrak{W}}_b\}^{n-1}\{\prod_j{}'\,\overline{\mathfrak{W}}_j\,\overline{\mathfrak{W}}_a\,\overline{\mathfrak{W}}_b\}^\omega x^{\lambda-c\omega} \tag{43}$$

$$= \frac{(q\,c^c)^\omega}{c\,\omega-1\,!}\int_0^1 dx(1-x^c)^{2n-1}x^{(n+1)c-1}\sum_0^{c\omega-1}{}^\lambda\binom{c\omega-1}{\lambda}x^\lambda$$

$$\cdot\prod_1^{n-1}{}_\varrho\left(\varrho+\frac{\lambda}{c}-\frac{a}{a}\right)\left(\varrho+\frac{\lambda}{c}-\frac{\beta}{b}\right)(-1)^\lambda$$

$$\cdot\prod_0^{\omega-1}{}_\varkappa\left(\varkappa+\frac{a}{a}-\frac{\lambda}{c}\right)\left(\varkappa+\frac{\beta}{b}-\frac{\lambda}{c}\right)\prod_1^{c-1}{}_j{}'\left(\varkappa+\frac{j-\lambda}{c}\right).$$

Ob dieses Integral definit ist, hängt wesentlich ab von den Koeffizienten der λ-Summe. Entsprechend der Bedingung (20) im Spezialfall muß zu (22, 23, 39) die weitere Einschränkung hinzutreten:

$$0 < \frac{\beta}{b} < \frac{\gamma}{c} < \frac{a}{a} < 1. \tag{44}$$

Zur Abkürzung setze man zudem mit $\lambda = 0, \ldots, c\omega - 1$ und $\eta = 0, \ldots, \omega$

$$\left\{\begin{aligned}
K_\lambda &= \prod_{\varrho=1}^{n-1}\left(\varrho + \frac{\lambda}{c} - \frac{a}{a}\right)\left(\varrho + \frac{\lambda}{c} - \frac{\beta}{b}\right)\\
L_\lambda &= \prod_{\varkappa=0}^{\left[\frac{\lambda}{c}\right]-1}\left(\frac{\lambda}{c} - \varkappa - \frac{a}{a}\right)\left(\frac{\lambda}{c} - \varkappa - \frac{\beta}{b}\right)\prod_{j=1}^{c-1}{}'\left(\frac{\lambda}{c} - \varkappa - \frac{j}{c}\right)\\
M_\lambda &= \prod_{\varkappa=\left[\frac{\lambda}{c}\right]+1}^{\omega-1}\left(\frac{a}{a} + \varkappa - \frac{\lambda}{c}\right)\left(\frac{\beta}{b} + \varkappa - \frac{\lambda}{c}\right)\prod_{j=1}^{c-1}{}'\left(\frac{j}{c} + \varkappa - \frac{\lambda}{c}\right)\\
N_\lambda &= (-1)^{\lambda + c\left[\frac{\lambda}{c}\right]}\left(\frac{a}{a} - \frac{\lambda}{c} + \left[\frac{\lambda}{c}\right]\right)\left(\frac{\beta}{b} - \frac{\lambda}{c} + \left[\frac{\lambda}{c}\right]\right)\\
&\qquad\qquad \cdot \prod_{j=1}^{c-1}{}'\left(\frac{j}{c} - \frac{\lambda}{c} + \left[\frac{\lambda}{c}\right]\right),
\end{aligned}\right. \tag{45}$$

so gilt nach (44)

$$0 < K; \quad 0 < L, \quad 0 < M. \tag{46}$$

Für $\lambda^2 \not\equiv \gamma\lambda\ (c)$ ist

$$N_\lambda = 0 \tag{46'}$$

wegen $\prod_j{}' = 0$; weiter ist

$$N_{\eta c} = \frac{a\beta}{ab}\prod_{j=1}^{c-1}{}'\frac{j}{c} = \frac{a\beta}{\gamma}\frac{c^{1-c}}{ab}\cdot c!$$

$$> 0; \tag{46''}$$

und schließlich werden die noch übrigen

$$\begin{aligned}
N_{\eta c+\gamma} &= (-1)^{\gamma + c\left[\frac{\gamma}{c}\right]}\left(\frac{a}{a} + \left[\frac{\gamma}{c}\right] - \frac{\gamma}{c}\right)\left(\frac{\beta}{b} + \left[\frac{\gamma}{c}\right] - \frac{\gamma}{c}\right)\prod_j{}'\left(\frac{j}{c} + \left[\frac{\gamma}{c}\right] - \frac{\gamma}{c}\right)\\
&= (-1)^{\gamma + c\left[\frac{\gamma}{c}\right]}\left(\frac{a}{a} - \frac{\gamma}{c}\right)\left(\frac{\beta}{b} - \frac{\gamma}{c}\right)\prod_{j=1}^{\gamma-1}(\gamma - j)\cdot\frac{(-1)^{\gamma-1}}{c^{c-2}}\prod_{j=\gamma+1}^{c-1}(j - \gamma)\\
&= \left(\frac{a}{a} - \frac{\gamma}{c}\right)\left(\frac{\gamma}{c} - \frac{\beta}{b}\right)c^{2-c}\prod_{j=1}^{\gamma-1}(\gamma - j)\prod_{j=\gamma+1}^{c-1}(j - \gamma)
\end{aligned}$$

$$> 0. \tag{46'''}$$

Es ist aber nach (43, 44, 45)

$$C\,S_{3n-1+\omega}(q) = \frac{(qc^c)^\omega}{(c\omega-1)!}\int_0^1 dx(1-x^c)^{2n-1}x^{(n+1)c-1}\sum_{\lambda=0}^{c\omega-1}\binom{c\omega-1}{\lambda}x^\lambda K_\lambda L_\lambda M_\lambda N_\lambda$$

und nach (46) ff.

> 0, d. h. (38, 38') sind erfüllt.

Zusammenfassend sprechen wir aus

Satz 6. Vor.: $0 < (abc)^2 \equiv a \equiv b \equiv c \equiv \alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 0\ (1)$

$$0 < \frac{\beta}{b} < \frac{\gamma}{c} < \frac{a}{a} < 1$$

$$0 < 4\,\sigma^3\,(ab)^4 e^5 c^6 < \tau\,.$$

Beh.: $$\sum_1^\infty{}^{\nu} q^\nu \prod_1^\nu{}^{\varrho} \frac{\left(\varrho + \frac{\alpha}{a}\right)\left(\varrho + \frac{\beta}{b}\right)}{\left(\varrho + \frac{\gamma}{c}\right)\varrho}$$ ist irrational.

Zusatz. Methodisch von Interesse scheint folgende Tatsache: Befreien können wir uns leicht vom letzten Teil unserer Voraussetzung (44), die allgemeiner gestaltet werden kann, und von der Asymmetrie zwischen A_ν und C_ν, indem statt des letzteren mit geeigneten ganzen d, δ ein Produkt

$$B_\nu = \prod_1^\nu{}^{\varrho} \left(\varrho + \frac{\gamma}{c}\right)\left(\varrho + \frac{\delta}{d}\right)$$

eingeführt wird.

Nicht hebbar aber bleibt bei der zuletzt benutzten Beweisführung (39—46‴) die wesentliche Einschränkung $\frac{\gamma}{c} \not\equiv 0\ (1)$ und im eben angedeuteten allgemeineren Fall $\frac{\gamma}{c} \not\equiv \frac{\delta}{d}\ (1)$.

Doch soll hierauf nicht näher eingegangen werden.

§ 11. Höhere Irrationalität.

In § 9 wurden u. a. auch gewisse Zylinderfunktionen I. Art als irrationalwertig für geeignete Argumente erkannt; in § 7 war schon eine Aussage enthalten über das Quadrat derselben Funktionen.

Indem wir uns auf den einfachsten Fall (Ordnung 0) beschränken, lautet eine naturgemäße Verallgemeinerung jener Fragestellungen: Kann $J_0(2\sqrt{-q})$ irgendwelche Werte aus einem quadratischen Zahlkörper annehmen?

Die Antwort wird verneinend lauten, wodurch ein Nachweis „höherer Irrationalität“ geleistet ist.

Ehe wir die strenge Beweisführung beginnen, die sich lediglich in Verifikationen erschöpfen wird, sei einiges heuristische Beiwerk vorausgeschickt, gewissermaßen als Leitmotiv zur Ergänzung des I. Kapitels.

Zu betrachten sind gegenwärtig

(1) $$J_0(2\sqrt{-q_1}) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{q_1^\nu}{\nu!^2} = \xi(q_1)$$

und das Quadrat von $\xi(q_2)$

(2) $$\xi^2(q_2) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{\binom{2\nu}{\nu} q_2^\nu}{\nu!^2}\,.$$

Für die ganze Transzendente $\xi(x)$ besteht dann folgende Integralgleichung:

$$2\pi i\,\xi^2(x) = \int\limits_{(0+)} \frac{du}{u}\,\frac{\xi\left(\frac{1}{u}\right)}{\sqrt{1-4ux}}, \tag{3}$$

wobei der Integrationsweg den Punkt $u=0$ hinreichend eng in positivem Sinne umfährt; sie läßt sich herleiten aus der Differentialgleichung für ξ:

$$\xi\left(\frac{1}{u}\right) = \{u^2\,\mathfrak{D}\,u\,\mathfrak{D}\}\,\xi\left(\frac{1}{u}\right). \tag{3'}$$

Erklärt man eine abzählbare Folge von Polynomen $S_{1,}$ durch

$$\left\{\begin{array}{l} S_{1,\,8m-1}(x) = x^{m-1}(1-x)^{2m-1}\sum\limits_0^{5m+1} b_\lambda x^\lambda, \quad \text{wo} \quad \dfrac{\partial b_\lambda}{\partial x} = 0 \\ S_{1,\,\nu}(x) = \dfrac{1}{q_1}\{\mathfrak{D}_x x\,\mathfrak{D}_x\} S_{1,\,\nu+1}(x), \qquad S_{1,\,8m+\nu}(0) = 0, \end{array}\right\}, \tag{4}$$

so ist

$$\sum_0^\infty S_{1,\,\nu}(x) = S\,\xi(q_1 x) \qquad \text{mit} \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

und wegen (4) besteht die Aussparung aus (5):

$$\sum_1^m S_{1,\,8m-\varkappa}(1) = 0. \tag{5'}$$

Bildet man mit (2) und der Konstante $S = S(b_\lambda)$ aus (5) wie in § 7

$$S\,\xi^2(q_2 x) = \sum_0^\infty S_{2,\,\nu}(x), \tag{6}$$

so gilt nach (3, 4, 5)

$$2\pi i\,S_{2,\,\nu}(x) = \int\limits_{(0+)} \frac{du}{u}\,\frac{S_1\left(\frac{1}{u}\right)}{\sqrt{1-4ux\,\frac{q_2}{q_1}}} \quad \text{und für } \varkappa = 1, \ldots, m$$

$$2\pi i\,S_{2,\,8m-\varkappa}(1) = \int\limits_{(0+)} \frac{du}{u}\,\frac{S_{1,\,8m-\varkappa}\left(\frac{1}{u}\right)}{\sqrt{1-4u\,\frac{q_2}{q_1}}} \qquad \text{und nach (4)}$$

$$= \int\limits_{(0+)} \frac{du}{u}\left(1-4u\,\frac{q_2}{q_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \{u^2\,\mathfrak{D}\,u\,\mathfrak{D}\}^{\varkappa-1} S_{1,\,8m-1}\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$= \int\limits_{(0+)} du\left(1-4u\,\frac{q_2}{q_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \{u\,\mathfrak{D}\,u\,\mathfrak{D}\,u\}^{\varkappa-1}\,\frac{1}{u}\,S_{1,\,8m-1}\left(\frac{1}{u}\right),$$

nach $2\varkappa-2$ Teilintegrationen:

$$= \int\limits_{(0+)} \frac{du}{u}\,S_{1,\,8m-1}\left(\frac{1}{u}\right)\{u\,\mathfrak{D}\,u\,\mathfrak{D}\,u\}^{\varkappa-1}\left(1-4u\,\frac{q_2}{q_1}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

mit $\dfrac{\partial c_{\varkappa\varrho}}{\partial u} = 0$:

$$= \int\limits_{(0+)} \frac{du}{u} S_{1,8m-1}\left(\frac{1}{u}\right) \sum_{0}^{2\varkappa-1}{}_{\varrho} c_{\varkappa,\varrho}\left(1 - 4u\,\frac{q_2}{q_1}\right)^{\frac{1}{2}-\varrho} u^{\varkappa-1}$$

$$= \sum_{1}^{2\varkappa-1}{}_{\varrho} c_{\varkappa\varrho} \int\limits_{(0+)} du \cdot u^{\varkappa-2} S_{1,8m-1}\left(\frac{1}{u}\right)\left(1 - 4u\,\frac{q_2}{q_1}\right)^{\frac{1}{2}-\varrho}, \qquad \text{nach (4):}$$

$$= \sum_{1}^{2\varkappa-1}{}_{\varrho} c_{\varkappa\varrho} \sum_{0}^{5m+1}{}_{\lambda} b_\lambda \int\limits_{(0+)} du \cdot u^{\varkappa-1-m-\lambda}\left(1 - \frac{1}{u}\right)^{2m-1}\left(1 - 4u\,\frac{q_2}{q_1}\right)^{\frac{1}{2}-\varrho}$$

$$= \sum_{1}^{2\varkappa-1}{}_{\varrho} c_{\varkappa\varrho} \sum_{0}^{2m-1}{}_{\omega} (-1)^\omega \binom{2m-1}{\omega} \sum_{0}^{5m+1}{}_{\lambda} b_\lambda \int\limits_{(0+)} du \cdot u^{\varkappa-1-m-\lambda-\omega} \cdot \left(1 - 4u\,\frac{q_2}{q_1}\right)^{\frac{1}{2}-\varrho}.$$

Zureichend für eine Aussparung aus (6) von der Form

$$(6') \qquad \sum_{1}^{m}{}_{\varkappa} S_{2,8m-\varkappa}(1) = 0$$

ist also ein System

$$(7) \quad \sum_{0}^{5m+1}{}_{\lambda} b_\lambda \int\limits_{(0+)} du \cdot u^{\varkappa-1-m-\lambda-\omega}\left(1 - 4u\,\frac{q_2}{q_1}\right)^{\frac{1}{2}-\varrho} = 0 \quad \left\{\begin{matrix} \varkappa = 1, 2, \ldots, m \\ \varrho = 1, 2, \ldots, 2m-1 \\ \omega = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1 \end{matrix}\right\}.$$

Wie dieses scheinbar überbestimmte lineare Gleichungssystem sich zurückführen läßt auf ein diophantisches System von nur $5m-2$ Gleichungen für $5m+1$ (normierte) Unbekannte, soll in der gegenwärtigen andeutenden Skizze nicht verfolgt werden; es mag der Hinweis genügen, daß der Anschluß an § 3 erreicht ist, indem aus (4, 7) simultan die Aussparungen (5′, 6′) fließen.

Wenden wir uns zur Durchführung der in (1—7) angedeuteten Skizze in deduktiver Form, so sind einige Hilfssätze vorwegzunehmen. Um nur ein Minimum von Grundlagen in Anspruch zu nehmen, soll ferner die komplexe Funktionentheorie ausgeschaltet werden; etwas formaler Ballast ist dafür in Kauf zu nehmen:

Hilfss. 11. Vor.:

$$(8) \qquad 4^{8m}\binom{\frac{3}{2}-2m}{3m-2+\lambda} = h_\lambda$$

mit $\lambda = 0, \ldots, 5m+1$; Primzahl $m > m_0(q_1, q_2, \tau)$;

$$(8') \qquad \frac{1}{(m-1)!^2}\,(2^4 q_1^8 q_2^6 \tau^{14})^m \{h_0, \ldots, h_{5m+1}\} = V \qquad \text{mit } 0 < q_1^2 q_2^2;$$

$$(8'') \qquad (-1)^\lambda 4^{8m}\binom{5m+1}{\lambda}\frac{\binom{\frac{3}{2}-\lambda}{5m-2}}{h_\lambda} V = a_\lambda; \qquad \text{für } \mu = 0, \ldots, 7m:$$

$$(8''') \qquad (-1)^\mu (m-1+\mu)!^2 \sum_{0}^{\mu}{}_{\lambda} q_1^{1+\lambda-m-\mu}\binom{2m-1}{\mu-\lambda}(4q_2)^{-\lambda} a_\lambda = g_\mu.$$

$$(9) \qquad \text{Beh.:} \quad |g_\mu| < \frac{(m-1+\mu)!^2}{(m-1)!};$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{ll} g_0 \equiv 0 \ (m) & \\ \not\equiv 0 \ (m^2); & \text{für } \mu = 1, \ldots, 7m \text{ aber} \\ g_\mu \equiv 0 \ (m^2) & \end{array}\right\}.$$

Bew.: Nach Hilfss. 5 ist $h_\lambda \equiv 0\ (1)$, so daß die linken Seiten von $(8-8''')$ einen Sinn haben. Nach (8) ist $h_0 = 4^{8m}\binom{\frac{3}{2}-2m}{3m-2} \equiv 0\ (m)$; aber $\{h_0, \ldots h_{5m+1}\} \equiv 0\ (m^1)$ und $\not\equiv 0\ (m^2)$; ebenso ist in $(8'')$

$$4^{8m}\binom{\frac{3}{2}}{5m-2}\left\{\begin{array}{l} \equiv 0\ (m^1) \\ \not\equiv 0\ (m^2) \end{array}\right\},$$

und so folgt (10) aus der Darstellung

$$g_\mu = \left[\frac{(m-1+\mu)!}{(m-1)!}\right]^2 \sum_0^\mu (-1)^{\mu+\lambda}\binom{5m+1}{\lambda}\binom{2m-1}{\mu-\lambda}[q_1^{1+7m+\lambda-\mu}\tau^{14m}q_2^{6m-\lambda}]$$
$$\cdot\left[4^{10m-\lambda}\binom{\frac{3}{2}-\lambda}{5m-2}\right]\left[\frac{\{h_0, \ldots, h_{5m+1}\}}{h_\lambda}\right];$$

denn für $\mu = 0$ ist nur der zweitletzte Faktor durch m^1 teilbar, sonst der erste durch m^2.

Nach (8) gilt

$$|h_\lambda| = \left|\frac{4^{8m}\,(\frac{3}{2}-2m)\cdots(\frac{3}{2}-5m-\lambda)}{(3m-2+\lambda)!}\right|$$

$$= 2^{13m+2-\lambda}\,\frac{(4m-3)\cdots(10m+2\lambda-9)}{(3m-2+\lambda)!}$$

$$= 2^{10m+4-2\lambda}\,\frac{(10m+2\lambda-9)!\ (2m-2)!}{(3m-2+\lambda)!\ (4m-5)!\ (5m+\lambda-4)!}\ ;\ \text{geordnet nach Primfaktoren:}$$

$$= \prod_p^{<10m+2\lambda-8} p^{e_p}.\quad \text{Setzt man } \frac{\log 10m+2\lambda-8}{\log p} = j_p \text{ und bezeichnet durch } \pi(m)$$

die Primzahlmenge $< m+1$, so ist

$$e_p = \sum_1^{j_p}\left[\frac{10m+2\lambda-9}{p^i}\right] + \left[\frac{2m-2}{p^i}\right] - \left[\frac{3m+\lambda-2}{p^i}\right]$$
$$-\left[\frac{4m-5}{p^i}\right] - \left[\frac{5m+\lambda-4}{p^i}\right] \qquad \text{(vgl. 7. 3—6)}$$

$< 3j_p$ gleichmäßig in m und λ;

mit der rohen Schätzung $\pi(20m) < \frac{1}{6}m$ wird für $m_1 < m$

$$\{h_0, \ldots, h_{5m+1}\} < \prod_p^{<20m} p^{3j_p} < e^{3\log(20m)\ \sum_p^{<20m} 1} < (20m)^{\frac{m}{2}}.$$

Die *Stirling*sche Formel mit $(8'-8''')$ gibt die Beh. (9).

Hilfss. 12. Vor.:

$$(11)\qquad \sum_0^{7m}\binom{2\mu+2m-2\varkappa}{\mu+m-\varkappa}\frac{(q_2x)^{\mu+m-\varkappa}}{(\mu+m-\varkappa)!^2} = S_{2,\,8m-\varkappa}(x);\qquad \varkappa = 1, \ldots, m;$$

$$(11')\qquad \left\{\frac{1}{4q_2}(\mathfrak{D}_x x)^2\,\mathfrak{D}_x x^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{D}_x^{-1}x^{-\frac{3}{2}}\right\}_{x=1}^{x-1} = \mathfrak{U}^{x-1};\qquad \frac{\partial c_{\varkappa\varrho}}{\partial x} = \frac{\partial c_{\varkappa\varrho}}{\partial v} = 0;$$

(11″) für $\nu = 0, \ldots, 8m-1$: $\quad \frac{1}{\nu!}\,\mathfrak{D}_v^{\nu}|_{v=0} = \mathfrak{V}^{\nu}$.

Beh.:

(12) $$S_{2,8m-\varkappa}(1) = \mathfrak{U}^{\varkappa-1} S_{2,8m-1}(x)$$

(12′) $$\{\mathfrak{U}^{\varkappa-1}\mathfrak{V}^{\nu} - \mathfrak{V}^{\nu}\mathfrak{U}^{\varkappa-1}\}\{-\sum_{0}^{\varkappa-2}{}^{\lambda}\binom{2\lambda}{\lambda}(q_2 x v)^{\lambda} + (1-4q_2 v x)^{-\frac{1}{2}}\} = 0$$

(12″) $$\mathfrak{U}^{\varkappa-1}\mathfrak{V}^{\nu}\{-\sum_{0}^{\varkappa-2}{}^{\lambda}\binom{2\lambda}{\lambda}(q_2 x v)^{\lambda} + (1-4q_2 x v)^{-\frac{1}{2}}\} = v^{\varkappa-1}\sum_{1}^{2\varkappa-1}{}^{\varrho} c_{\varkappa\varrho}(1-4q_2 v)^{\frac{1}{2}-\varrho}.$$

Bew.: Um (12) zu finden, zerlegen wir (11) gliedweise und finden

$$\mathfrak{U}^{\varkappa-1}\binom{2\mu+2m-2}{\mu+m-1}\frac{(q_2 x)^{\mu+m-1}}{(\mu+m-1)!^2}$$

$$= \mathfrak{U}^{\varkappa-2}\frac{(4q_2)^{\mu+m-1}}{(\mu+m-1)!^3}\prod_{1}^{\mu+m-1}{}^{\varrho}\left(\varrho-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4q_2}\{\mathfrak{D}_x x\}^2\mathfrak{D}_x x^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}_x^{-1}x^{-\frac{5}{2}+\mu+m}$$

$$= \mathfrak{U}^{\varkappa-2}\frac{(4q_2)^{\mu+m-2}}{(\mu+m-2)!^3}\prod_{1}^{\mu+m-2}{}^{\varrho}\left(\varrho-\frac{1}{2}\right)x^{\mu+m-2};$$

$(\varkappa-2)$-mal wiederholt:

$$= \binom{2\mu+2m-2\varkappa}{\mu+m-\varkappa}\frac{(q_2 x)^{\mu+m-\varkappa}}{(\mu+m-\varkappa)!^2}$$ und (12).

Um (12′) zu zeigen, betrachte man für $|5q_2 v| < x \leqq 1$ die Potenzreihe in $(x\,v)$:

$$(1-4q_2 x v)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda}\binom{2\lambda}{\lambda}(q_2 x v)^{\lambda},$$

die dann absolut und gleichmäßig mit allen ihren partiellen Ableitungen konvergiert; somit wird vertauschbar die Reihenfolge

$$\mathfrak{U}^{\varkappa-1}\mathfrak{V}^{\nu}\{-\sum_{0}^{\varkappa-2}{}^{\lambda}\binom{2\lambda}{\lambda}(q_2 x v)^{\lambda} + (1-4q_2 x v)^{-\frac{1}{2}}\}$$

$$= \mathfrak{U}^{\varkappa-1}\mathfrak{V}^{\nu}\sum_{\varkappa-1}^{\infty}{}^{\lambda}\binom{2\lambda}{\lambda}q_2^{\lambda}(x v)^{\lambda} = \sum_{\varkappa-1}^{\infty}{}^{\lambda}\binom{2\lambda}{\lambda}q_2^{\lambda}\mathfrak{V}^{\nu}v^{\lambda}\mathfrak{U}^{\varkappa-1}x^{\lambda}$$

$$= \mathfrak{V}^{\nu}\mathfrak{U}^{\varkappa-1}\{-\sum_{0}^{\varkappa-2}{}^{\lambda}\binom{2\lambda}{\lambda}(q_2 x v)^{\lambda} + (1-4q_2 x v)^{-\frac{1}{2}}\}.$$

Mit $\frac{\partial d_{\varkappa\mu}}{\partial x} = 0$ wird endlich

$$\{\mathfrak{D}_x x\}^{2\varkappa-2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{0}^{2\varkappa-2}{}^{\mu} d_{\varkappa\mu}\mathfrak{D}_x^{\mu}(1-x)^{-\frac{1}{2}}x^{\mu}$$

$$= \sum_{0}^{2\varkappa-2}{}^{\mu} d_{\varkappa\mu}\mathfrak{D}_x^{\mu}\sum_{0}^{\mu}{}^{\lambda}(-1)^{\lambda}\binom{\mu}{\lambda}(1-x)^{-\frac{1}{2}+\lambda}$$

$$= \sum_0^{2\varkappa-2} d_{\varkappa\mu}(-1)^\mu \mu! \sum_0^\mu (-1)^\lambda \binom{\mu}{\lambda}\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{\mu}(1-x)^{-\frac{1}{2}+\lambda-\mu}$$

und mit $1+\mu-\lambda=\varrho$

$$= \sum_0^{2\varkappa-2} d_{\varkappa\mu}\cdot\mu! \sum_1^{1+\mu}(-1)^{\varrho-1}\binom{\mu}{\varrho-1}\binom{\mu-\varrho+\frac{1}{2}}{\mu}(1-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}$$

$$= \sum_1^{2\varkappa-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\sum_0^{2\varkappa-2}\mu!\, d_{\varkappa\mu}\binom{\mu}{\varrho-1}\binom{\mu-\varrho+\frac{1}{2}}{\mu}$$

$$= \sum_1^{2\varkappa-1} c_{\varkappa\varrho}(1-x)^{\frac{1}{2}-\varrho} \qquad \text{und}$$

$$\{\mathfrak{D}_x x\}^{2\varkappa-2}(1-4q_2vx)^{-\frac{1}{2}} = \sum_1^{2\varkappa-1} c_{\varkappa\varrho}(1-4q_2vx)^{\frac{1}{2}-\varrho}.$$

Aus (11′) folgt jetzt (12″) durch Rechnung

$$\mathfrak{U}^{\varkappa-1}\{-\sum_0^{\varkappa-2}\binom{2\lambda}{\lambda}(q_2xv)^\lambda + (1-4q_2xv)^{-\frac{1}{2}}\}$$

$$= \mathfrak{U}^{\varkappa-2}\{\mathfrak{D}_x x\}^2\sum_{\varkappa-1}^{\infty}\binom{2\lambda}{\lambda}(q_2v)^\lambda\frac{1}{4q_2}\{\mathfrak{D}_x x^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}_x^{-1}x^{-\frac{3}{2}}\}x^\lambda$$

$$= \mathfrak{U}^{\varkappa-2}v\{\mathfrak{D}_x x\}^2(1-4q_2xv)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (\varkappa-2)\text{-mal wiederholt:}$$

$$= v^{\varkappa-1}\{\mathfrak{D}_x x\}^{2\varkappa-2}(1-4q_2xv)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_1^{2\varkappa-1} c_{\varkappa\varrho}v^{\varkappa-1}(1-4q_2v)^{\frac{1}{2}-\varrho}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Hilfss. 13. Vor.: (8, 8′, 8″);

(13) $\qquad \eta = -2m+1,\ -2m+2,\ \ldots 0,\ \ldots, 3m-2.$

(13′) $\qquad$ Beh.: $\sum_0^{5m+1}\binom{\frac{3}{2}-2m}{\eta+\lambda}a_\lambda = 0.$

Bew.: Erklärt man durch

(14) $$\sum_0^{5m+1}\bar{a}_\lambda\binom{\frac{3}{2}-2m}{\eta+\lambda}u^{\eta+\lambda} = P_\eta(u)$$

eine Polynomfolge, so gilt die Funktionalgleichung

$$0 = \mathfrak{D}_u P_{\eta+1}(uv) + v^{\frac{7}{2}-2m}\mathfrak{D}_v v^{2m-\frac{3}{2}}P_\eta(uv)$$

oder

(14′) $$P_\eta(uv) = \mathfrak{D}_u^{3m-2-\eta}\{v^{\frac{7}{2}-2m}(-\mathfrak{D}_v)v^{2m-\frac{3}{2}}\}^{\eta+2-3m}P_{3m-2}(uv).$$

Sei

(14″) $$\sum_0^{5m+1}\bar{a}^\lambda\binom{\frac{3}{2}-2m}{3m-2+\lambda}(uv)^{3m-2+\lambda} = P_{3m-2}(uv)$$

$$= \{v^{\frac{7}{2}-2m}\mathfrak{D}_v v^{2m-\frac{3}{2}}\}^{5m-2}(1-uv)^{5m+1}u^{3m-2}v^{-2m}$$

$$= (-1)^{5m-2}(5m-2)!\sum_0^{5m+1}(-1)^\lambda\binom{5m+1}{\lambda}\binom{\frac{3}{2}-\lambda}{5m-2}(uv)^{3m-2+\lambda},$$

woraus

$$4^{8m}(-1)^m \frac{\bar{a}_\lambda V}{(5m-2)!} = \frac{(-1)^\lambda \binom{5m+1}{\lambda}\binom{\frac{3}{2}-\lambda}{5m-2}}{\binom{\frac{3}{2}-2m}{3m-2+\lambda}} V 4^{8m},$$

und dies ist nach (8″)

$$= a_\lambda. \tag{15}$$

Nach (14′, 14″) und Hilfss. 2 ist $(uv)^{2m-1} P_\eta(uv) \equiv 0$ mod. $(1-uv)$ oder wegen (14)

$$\sum_0^{5m+1} \bar{a}_\lambda \binom{\frac{3}{2}-2m}{\eta+\lambda} = 0$$

und mit (15) endlich (13′).

Nach diesen Vorbereitungen bilde man mit (8‴) und $\nu = 0, 1, \ldots$

$$S_{1,\nu}(x) = \sum_0^{7m} {}_\mu g_\mu \frac{(q_1 x)^{\mu-\nu-7m}}{(\mu+\nu-7m)!^2}, \tag{16}$$

so wird für $\varkappa = 1, \ldots, m$

$$S_{1,8m-\varkappa}(x) = \left\{\frac{\mathfrak{D}_x x \mathfrak{D}_x}{q_1}\right\}^{\varkappa-1} S_{1,8m-1}(x) = \left\{\frac{\mathfrak{D}_x x \mathfrak{D}_x}{q_1}\right\}^{\varkappa-1} \sum_0^{7m} {}_\mu g_\mu \frac{(q_1 x)^{\mu+m-1}}{(\mu+m-1)!^2}$$

$$= \left\{\frac{1}{q_1}\mathfrak{D}_x x \mathfrak{D}_x\right\}^{\varkappa-1} x^{m-1} \sum_0^{2m-1} {}_{(\mu-\lambda)} \binom{2m-1}{\mu-\lambda} (-x)^{\mu-\lambda} \sum_0^{5m+1} {}_\lambda a_\lambda \left(\frac{-q_1 x}{4q_2}\right)^\lambda$$

$$= \left\{\frac{1}{q_1}\mathfrak{D}_x x \mathfrak{D}_x\right\}^{\varkappa-1} x^{m-1}(1-x)^{2m-1} \sum_0^{5m+1} {}_\lambda a_\lambda \left(\frac{-q_1 x}{4q_2}\right)^\lambda$$

und ausdifferenziert nach Hilfss. 2

$\equiv 0$ mod. $(1-x)$; es gilt für (16) also (5′).

Für die in (5, 6) eingehende Konstante S wird jetzt mit (8—8‴)

$$S = \sum_0^{7m} {}_\mu g_\mu \qquad \text{und nach 10} \tag{17}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \equiv 0\ (m), \text{ aber} \\ \not\equiv 0\ (m^2) \end{array}\right\} \tag{17′}$$

Zur Abkürzung werde bezeichnet

$$\sum_0^{7m-1} {}_\nu S_{1,\nu}(1) = H_1, \qquad \sum_{8m}^{\infty} {}_\nu S_{1,\nu}(1) = R_1, \tag{18}$$

so wird

$$H_1 = m^2 \sum_0^{7m-1} {}_\nu \sum_{7m-\nu}^{7m} {}_\mu \left[\frac{(\mu+m-1)!}{(\mu+\nu-7m)!\ m!}\right]^2 \sum_0^{\mu} {}_\lambda (-1)^{\mu-\lambda} \binom{2m-1}{\mu-\lambda}\binom{5m+1}{\lambda}$$

$$\cdot [q_1^{1+\nu+\lambda} \tau^{14m} q_2^{6m-\lambda}] \left[4^{10m-\lambda}\binom{\frac{3}{2}-\lambda}{5m-2}\right]\left[\frac{\{h_0, \ldots, h_{5m+1}\}}{h_\lambda}\right]$$

$$\equiv 0\ (m^2), \tag{18′}$$

und mit (1) wird

$$S\xi(q_1) = H_1 + R_1. \tag{19}$$

Aus (8—8‴, 16) vermerke man noch

$$(16') \qquad v^{8m-1} S_{1,\,8m-1}\left(\frac{1}{q_1 v}\right) = \sum_0^{7m} g_\mu \frac{v^{7m-\mu}}{(\mu+m-1)!^2}$$

$$= -\,q_1^{2-3m}(1-q_1 v)^{2m-1} \sum_0^{5m+1} \frac{a_\lambda}{(-4q_2)^\lambda} v^{5m+1-\lambda}.$$

In Ausführung von (6, 6′) bilde man mit (11, 11′, 12, 16)

$$S_{2,\,8m-\varkappa}(1) = \mathfrak{U}^{\varkappa-1} S_{2,\,8m-1}(x) = \sum_0^{7m} g_\mu \frac{1}{(\mu+m-1)!^2}\, \mathfrak{U}^{\varkappa-1}\binom{2\mu+2m-2}{\mu+m-1}$$

$$\cdot (q_2 x)^{\mu+m-1}$$

$$= \sum_0^{7m} \mathfrak{V}^{7m-\mu} v^{8m-1} S_{1,\,8m-1}\left(\frac{1}{q_1 v}\right) \mathfrak{U}^{\varkappa-1} \mathfrak{V}^{\mu+m-1}\{(1-4q_2 x v)^{-\frac{1}{2}}\},$$

nach (12′) und Satz von *Leibniz*:

$$= \mathfrak{V}^{8m-1} v^{8m-1} S_{1,\,8m-1}\left(\frac{1}{q_1 v}\right) \mathfrak{U}^{\varkappa-1}\{(1-4q_2 x v)^{-\frac{1}{2}} - \sum_0^{\varkappa-2}\binom{2\lambda}{\lambda}(q_2 x v)^\lambda\},$$

nach (12″, 16′):

$$= -\,q_1^{2-3m}\mathfrak{V}^{8m-1}(1-q_1 v)^{2m-1} \sum_0^{5m+1} \frac{a_\lambda}{(-4q_2)^\lambda} v^{5m+1-\lambda+\varkappa-1}$$

$$\cdot \sum_1^{2\varkappa-1} c_{\varkappa\varrho}(1-4q_2 v)^{\frac{1}{2}-\varrho}, \qquad \text{geordnet:}$$

$$= -\,q_1^{2-3m} \sum_1^{2\varkappa-1} c_{\varkappa\varrho} \sum_0^{5m+1} \frac{a_\lambda}{(-4q_2)^\lambda}\, \mathfrak{V}^{8m-1}(1-q_1 v)^{2m-1} v^{5m+\varkappa-\lambda}$$

$$\cdot (1-4q_2 v)^{\frac{1}{2}-\varrho}, \qquad \text{mit binomischem Satz:}$$

$$= -\,q_1^{2-3m} \sum_\varrho \cdots \sum_\lambda \cdots \mathfrak{V}^{8m-1} \sum_0^{2m-1} (-q_1)^\omega \binom{2m-1}{\omega} v^{5m+\omega+\varkappa-\lambda}$$

$$\cdot (1-4q_2 v)^{\frac{1}{2}-\varrho}, \qquad \text{umgestellt:}$$

$$= \sum_0^{2m-1} (-1)^{\omega-1} q_1^{\omega+2-3m}\binom{2m-1}{\omega} \sum_1^{2\varkappa-1} c_{\varkappa\varrho} \sum_0^{5m+1} \frac{a_\lambda}{(-4q_2)^\lambda}$$

$$\cdot \mathfrak{V}^{8m-1} v^{5m+\omega+\varkappa-\lambda}(-4q_2 v)^{3m-1+\lambda-\omega-\varkappa}\binom{\frac{1}{2}-\varrho}{3m-1+\lambda-\omega-\varkappa}$$

$$= \sum_0^{2m-1} (-1)^{m-\varkappa} q_1^{2-3m+\omega}\binom{2m-1}{\omega} \sum_1^{2\varkappa-1} c_{\varkappa\varrho}(4q_2)^{3m-1-\varkappa-\omega}$$

$$\cdot \sum_0^{5m+1} a_\lambda \binom{\frac{1}{2}-\varrho}{3m-1+\lambda-\varkappa-\omega},$$

nach dem Additionstheorem der Binomialkoeffizienten:

$$= \sum_0^{2m-1} (-1)^{m-\varkappa} q_1 \cdots \sum_1^{2\varkappa-1} \cdots \sum_0^{5m+1} a_\lambda \sum_{-\lambda}^{3m-1-\varkappa-\omega} \binom{\frac{3}{2}-2m}{\lambda+\eta}$$

$$\cdot \binom{2m-1-\varrho}{3m-1-\varkappa-\omega-\eta},$$

aber weil $\binom{2m-1-\varrho}{3m-1-\varkappa-\omega-\eta}=0$ für $\eta<-2m+1$:

$$=\sum_{0}^{2m-1}_{\omega}\cdots\sum_{1}^{2\varkappa-1}_{\varrho}\cdots\sum_{0}^{5m+1}_{\lambda}a_\lambda\sum_{-2m+1}^{3m-1-\varkappa-\omega}_{\eta}\binom{\frac{3}{2}-2m}{\lambda+\eta}\binom{2m-1-\varrho}{3m-1-\varkappa-\omega-\eta}.$$

umgestellt:

$$=\sum_{0}^{2m-1}_{\omega}\cdots\sum_{1}^{2\varkappa-1}_{\varrho}c_{\varkappa\varrho}(4q_2)^{3m-1-\varkappa-\omega}\sum_{-2m+1}^{3m-1-\varkappa-\omega}_{\eta}\binom{2m-1-\varrho}{3m-1-\varkappa-\omega-\eta}$$

$$\cdot\sum_{0}^{5m+1}_{\lambda}\binom{\frac{3}{2}-2m}{\lambda+\eta}a_\lambda. \qquad \text{nach (13, 13')}$$

$$=0.$$

Auf Grund von (8) ff. ist jetzt die Gültigkeit von (6') gezeigt, und zugleich ist Aufstellung und Lösung von (7) gelungen lediglich durch Mittel der reellen Analysis. Zur Kürzung setze man

$$(20)\qquad \sum_{0}^{7m-1}_{\nu}S_{2,\nu}(1)=H_2,\qquad \sum_{8m}^{\infty}_{\nu}S_{2,\nu}(1)=R_2,$$

wo allgemein

$$(11''')\qquad \sum_{0}^{7m}_{\mu}g_\mu\binom{2\mu+2\nu-14m}{\mu+\nu-7m}\frac{q_2^{\mu+\nu-7m}}{(\mu+\nu-7m)!^2}=S_{2,\nu}(1)$$

erklärt sei (im Einvernehmen mit (11)); aus (2, 6, 8 — 8''', 17, 20) folgt

$$(19')\qquad S\,\xi^2(q_2)=H_2+R_2,$$

wobei für den ersten Ausdruck in (20) wegen (8—8''', 11''') die Teilbarkeit

$$H_2=m^2\sum_{1}^{7m}_{\mu}\sum_{7m-\nu}^{7m-1}_{\nu}\left[\frac{(m-1+\mu)!}{m!\,(\mu+\nu-7m)!}\right]^2\binom{2\mu+2\nu-14m}{\mu+\nu-7m}\sum_{0}^{5m+1}_{\lambda}(-1)^{\mu+\lambda}\binom{2m-1}{\mu-\lambda}$$

$$\cdot\binom{5m+1}{\lambda}[q_1^{1+7m+\lambda-\mu}\tau^{14m}q_2^{\mu+\nu-m-\lambda}]\left[4^{10m-\lambda}\binom{\frac{3}{2}-\lambda}{5m-2}\right]\left[\frac{\{h_0,\ldots h_{5m+1}\}}{h_\lambda}\right]$$

$$(20')\qquad \equiv 0\ (m^2)$$

bemerkt wird.

Damit sind alle Elemente bereitgestellt, um den gewünschten Irrationalitätsschluß zu Ende zu führen. Setzt man mit

$$(21)\qquad 0<|A_0|\equiv A_1\equiv A_2\equiv 0\ (1)$$

hypothetisch die Beziehung an

$$(21')\qquad A_0+A_1\xi(q_1)+A_2\xi^2(q_2)=0,$$

so folgte aus (19, 19')

$$A_0S+A_1H_1+A_2H_2=-(A_1R_1+A_2R_2)$$

und für $|A_0|<m$ nach (17', 18', 20')

$$(21'')\qquad 0<|A_1R_1+A_2R_2|\equiv 0\ (m).$$

Die Möglichkeit von (21'') prüfen wir durch Majorisierung von R_1 und R_2 vermöge (9, 16, 18, 20, 11'''). Für $m_0(\sigma_1\sigma_2, A_1, A_2)<m$ erhält man

$$|A_1R_1 + A_2R_2| \leqq \sum_{8m}^{\infty} |A_1S_{1,\nu}(1) + A_2S_{2,\nu}(1)|$$

$$\leqq (A_1^2 + A_2^2) \sum_{0}^{7m} \frac{|g_\mu|}{(\mu + m - 1)!^2} \sum_{8m}^{\infty} \frac{(\mu + m - 1)!^2}{(\mu + \nu - 7m)!^2}$$

$$\cdot (5\tau^2 q_1^2 + 5\tau^2 q_2)^{\mu+\nu-7m}$$

$$\leqq \frac{(A_1^2 + A_2^2)}{m!} e^{5\sigma_1^2 + 5\sigma_2^2} \sum_{0}^{7m} (5\sigma_1^2 + 5\sigma_2^2)^{m+\mu}$$

$$\leqq \frac{(A_1^2 + A_2^2)}{m!} e^{5\sigma_1^2 + 5\sigma_2^2} (7m + 1)\,(5\sigma_1^2 + 5\sigma_2^2)^{8m}, \quad \text{zuletzt}$$

$$< m$$

im Widerspruch zu (21″). Somit ist (21′) unzulässig und muß ersetzt werden durch den kontradiktorischen

Satz 7. Vor.: $0 < |A_0| \leqq A_1 \leqq A_2 \leqq 0\ (1)$ und 1. 1. 2;

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!^2} = \xi(x).$$

Beh.: $0 < |A_0 + A_1\xi(q_1) + A_2\xi^2(q_2)|$.

Zusatz. Für $q_1 = q_2$ folgt wegen Satz 4, daß $\xi(q_1)$ alle quadratischen Zahlkörper meidet.

Quellennachweis.

Verfasser	Titel	Kürzung
Hermite, Ch.:	Sur la Fonction Exponentielle, 1873	(He)
Hilbert, D.:	Über die Zahlen e und π. Math. Ann. 1893	(Hi)
Hurwitz, A.:	Über die Zahlen e und π. Math. Ann. 1893	(Hu)
Mantel W.:	Nieuw Arkief voor Wiskunde, 1896	(M)
Stridsberg. E.:	Acta Mathematica, 1910	(St)
Riemann, B.:	Werke, S. 381	(R)
Tschakaloff, Lj.:	Math. Annalen, 1919—21.	(Tsch)

Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 und Leipzig
Postscheckkonto Berlin NW 7 Nr. 59533

Mathematische Neuerscheinungen

Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine Mathematik.

Bd. 4: **Synthetische Zahlentheorie.** Von Dr. Rudolf Fueter, o. Prof. an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. Groß-Oktav. VIII, 277 Seiten. M. 10.—, geb. 12.—

Bd. 6: **Einführung in die Axiomatik der Algebra.** Von Dr. H. Beck, o. Prof. der Mathematik an der Universität Bonn. Groß-Oktav. X, 198 Seiten. M. 9.—, geb. 10.50

Bd. 7: **Mengenlehre.** Von Dr. F. Hausdorff, o. Prof. der Mathematik an der Universität Bonn. Zweite, neubearb. Aufl. Mit 12 Figuren. Groß-Oktav. 285 Seiten. M. 12.—, geb. 13.50

Bd. 8: **Algebra.** Von Dr. Oskar Perron, o. Prof. an der Universität München. I. Die Grundlagen. Mit 4 Figuren. Im Druck.

Bd. 9: **Algebra.** Von Dr. Oskar Perron, o. Prof. an der Universität München. II. Theorie der algebraischen Gleichungen. Mit 5 Figuren. Im Druck.

Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Reg.-Rat, Prof. an der Technischen Hochschule in Charlottenburg. Mit 438 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 743 Seiten. M. 30.—, geb. 33.—

Elementare Algebra. Von Prof. Paul B. Fischer, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. Mit 20 Figuren. 149 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 930.*) Geb. M. 1.50

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. Von Dr. Hermann Schubert, weil. Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Vierte, neubearbeitete Auflage von Prof. P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. 139 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 48.*) Geb. M. 1.50

Höhere Algebra. Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Prof. der Mathematik an der Universität Halle. I. Lineare Gleichungen. 160 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 931.*) Geb. M. 1.50
II. Gleichungen höheren Grades. Mit 5 Figuren. Im Druck.

Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski. o. Prof. an der Technischen Hochschule in Dresden. Zweite, verkürzte Auflage. Groß-Oktav. IV, 304 Seiten. M. 14.—, geb. 15.50

Elementare Reihenlehre. Von Dr. Hans Falckenberg, Prof. an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 943.*) Geb. M. 1.50

Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Prof. der Mathematik an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 140 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 668.*) Geb. M. 1.50

Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 138 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 703.*) Geb. M. 1.50

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Dr. G. Hoheisel, Privatdozent in Breslau. 159 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 920.*) Geb. M. 1.50

Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 und Leipzig
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 59533

Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. Von Dr. L. Schlesinger, o. Prof. an der Universität Gießen, und Dr. A. Pleßner. Groß-Oktav. VIII, 229 Seiten. M. 14.—, geb. 16.—

Potentialtheorie. Von Dr. W. Sternberg, Privatdozent in Heidelberg.

I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 901.*) Geb. M. 1.50

II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Figur. 133 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 944.*) Geb. M. 1.50

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Dr. Gerhard Hessenberg, o. Prof. an der Universität Tübingen. Mit 59 Figuren. Dritte, neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 171 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 99.*) Geb. M. 1.50

Versicherungsmathematik. Von Dr. Friedrich Boehm, Prof. an der Universität München.

I. Elemente der Versicherungsrechnung. 144 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 180.*) Geb. M. 1.50

II. Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 171 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 917.*) Geb. M. 1.50

Mathematische Instrumente. Von Privatdozent Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Figuren. 144 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 922.*) Geb. M. 1.50

Geometrische Aufgaben und Übungen. Von Dr. F. G. Mehler. Neubearbeitet von Oberstudiendirektor A. Schulte-Tigges, Geh. Studienrat. Ausgabe B: Oberstufe. Oktav. 89 Seiten. M. 1.50

Grundzüge und Anwendungen der Differential- und Integralrechnung mit zahlreichen Übungsaufgaben für höhere Schulen. Von Oberstudiendirektor A. Schulte-Tigges, Geh. Studienrat. Oktav. Mit 1 Tafel. 63 Seiten. M. 1.—

Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. Begründet von Dr. Prof. F. W. Küster †. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet und mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von Prof. Dr. A. Thiel, o. ö. Prof. der physikalischen Chemie, Direktor des Physikalisch-Chemischen Instituts der Universität Marburg. Dreißigste bis vierunddreißigste, verbesserte und vermehrte Auflage. Oktav. 148 Seiten und eine Tafel. Geb. M. 6.—

Vierstellige Logarithmentafeln. Von Max Zacharias, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. Paul Meth, Studienrat an der Herderschule in Charlottenburg. Groß-Oktav. 44 Seiten. Stark kartoniert M. 1.50

Mit dem „Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis" wurde im Jahre 1926 ausgezeichnet:

Kreis und Kugel

Von

Dr. Wilhelm Blaschke
o. Prof. an der Univ. Hamburg

1916. Mit 27 Figuren im Text. Groß-Oktav. X, 169 Seiten. Geh. M. 4.40, geb. 5.50

JUL 25 1927

GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schaefer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 156.

Heft 3.

Ausgegeben den 28. März.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1927

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 156. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

Wellstein, Julius, Flächen isotroper Drehungen und Schraubungen . . . . Seite 149

Grawe, D., Über die linearen Differentialgleichungen, die in bezug auf die lineare gebrochene Transformationsgruppe invariant sind . . . . . — 164

Böhmel, Hans, Kurvenklassen $f(x, \tau) = 0$ mit vorgegebenen Eigenschaften . — 176

Berwald, L., Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume. I. Teil . . — 191

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Flächen isotroper Drehungen und Schraubungen[1]).

Von *Julius Wellstein* in Karlsruhe.

Literatur.

1. *Beck, H.* Die Gruppe der Minimalgeraden. Leipz. Ber. (Math.-Phys. Kl.) Bd. 64 (1912) S. 35—56.
2. *Lie, S.* Bestimmung aller Flächen, die eine kontinuierliche Schar von projektiven Transformationen gestatten. Leipz. Ber. (Math.-Phys. Kl.) Bd. 47 (1891) S. 209—260.
3. *Study, E.* Über einige imaginäre Minimalflächen. Leipz. Ber. (Math.-Phys. Kl.) Bd. 63 (1911) S. 14—26.
4. *Study, E.* Minimalkurven und Serretsche Flächen. Amer. Journ. of Math. Bd. 32 (1910) S. 264—278.
5. *Wellstein, J.* Isotrope Drehungen und Schraubungen. Festschrift anläßlich des 100 jährigen Bestehens der Technischen Hochschule Karlsruhe (1925) S. 142—150.

Die vorliegende Untersuchung schließt sich formal wie inhaltlich unmittelbar an des Verfassers Arbeit (Literatur Nr. 5) an, deren wesentliche Ergebnisse hier, der Raumersparnis halber, als bekannt vorausgesetzt werden sollen.

Eine eingliedrige Gruppe isotroper Drehungen $\{D_i\}$ oder isotroper Schraubungen $\{S_i\}$ erzeugt aus einer analytischen Kurve (Kurvenstück), die nicht Bahnkurve der Gruppe ist, eine *Drehfläche* $[D_i]$ oder *Schraubenfläche* $[S_i]$. *Diese Flächen treten im komplexen Gebiet den gewöhnlichen Dreh- und Schraubenflächen völlig gleichberechtigt zur Seite* und teilen mit ihnen zahlreiche wichtige Eigenschaften. Die Existenz dieser Flächen ist bisher vielfach übersehen worden, eine *systematische* Behandlung findet sich in der Literatur nirgends.

Im folgenden soll nun kurz der zur differentialgeometrischen Untersuchung dieser Flächen nötige Formelapparat aufgestellt werden; namentlich aufgeführt werden bei beiden Flächengattungen die geradlinigen, die Flächen fester Krümmung sowie die Minimalflächen, ausführlicher besprochen die Minimalschraubenfläche 6. Ordnung und Klasse.

Die Frage nach gemeinsamen Kennzeichen der hier behandelten und der gewöhnlichen Dreh- und Schraubenflächen sowie das Problem der Isometrie dieser Flächen sei einer besonderen Untersuchung vorbehalten.

[1]) Im Auszug vorgetragen auf der Versammlung der Deutschen Math.-Vereinigung in Marburg, 1923.

§ 1. Die Drehflächen $[D_i]$.

1. *Darstellung in kanonischen Koordinaten.* Führt man an Stelle der gewöhnlichen Euklidischen Koordinaten die *kanonischen Koordinaten der Drehungsgruppe* $\{D_i\}$ ein:

$$(1) \qquad \varrho = \frac{(X/X)}{2(X/\mathfrak{c})}, \quad \sigma = \frac{(X/\mathfrak{b})}{(X/\mathfrak{c})}, \quad \tau = (X/\mathfrak{c}), \qquad \text{oder aufgelöst:}$$

$$(X/\mathfrak{c}) = \tau, \quad (X/\mathfrak{b}) = \sigma\tau, \quad (X/\mathfrak{a}) = -\varrho - \tfrac{1}{2}\sigma^2\tau,$$

so sendet die Gruppe durch den Punkt [1]) $Q(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$ die Bahnkurve:

$$(2) \qquad \boxed{\varrho = \varrho_0, \quad \sigma\,(= p) = \sigma_0 + t, \quad \tau = \tau_0,}$$

einen parabolischen Kreis, dessen Gleichung in gewöhnlichen Koordinaten die Formel:

$$(3) \qquad \boxed{(X/w) = \varrho(\mathfrak{c}/w) - \tau\{-\tfrac{1}{2}p^2\,\mathfrak{c} + p\,\mathfrak{b} + \mathfrak{a}/w\}}$$

darstellt. Von dieser Darstellung sind nur die Punkte der Normalebene $[v_0]$ $(\tau = 0)$ ausgeschlossen, deren Bahnkurven isotrope, zur Drehachse (g) parallele Geraden sind.

Ist nun Q *irgend ein Punkt einer nicht in* $[v_0]$ *gelegenen analytischen Kurve* (Q), $Q_h = Q_h(q)$, $h = 1, 2, 3$, *so sind*:

$$(4) \qquad \varrho = \varrho_0 = \frac{(Q/Q)}{2(Q/\mathfrak{c})}, \qquad \tau = \tau_0 = (Q/\mathfrak{c}) \not\equiv 0$$

analytische Funktionen von q; sieht man ein für allemal von dem Fall ab, daß gleichzeitig ϱ und τ konstant sind, also die Kurve (Q) selbst Bahnkurve der Gruppe ist, so *stellt die Gleichung* (2) (oder (3)) *die von* (Q) *erzeugte Drehfläche* $[D_i]$ *dar.*

Die *Profilebenen* $p = \text{const.}$ schneiden die Fläche $[D_i]$ in Kurven, welche zueinander und der *Profilkurve* (P):

$$(5) \qquad (P/w) = \varrho(\mathfrak{c}/w) - \tau(\mathfrak{a}/w)$$

kongruent sind, und es kann die Fläche auch durch Drehung dieser Kurve erhalten werden [2]). *Es dürfen somit* $\varrho = \varrho(q)$, $\tau = \tau(q) \not\equiv 0$ *als beliebige* (nicht gleichzeitig konstante) *analytische Funktionen mit gemeinsamem Existenzbereich angenommen werden*, und *die Gleichung* (2) (oder (3)) *stellt in Parametern* p, q *alle Drehflächen* (die Ebene $[v_0]$ ausgeschlossen) *dar* [3]).

Die algebraischen Drehflächen sind durch eine algebraische Abhängigkeit zwischen ϱ *und* τ *charakterisiert.*

2. *Die Fundamentalformen.* Zu der Parameterdarstellung (3) gehört die erste Fundamentalform (der Akzent deute die Ableitung nach q an):

---

[1]) Unter „Punkt", „Gerade", „Ebene" ohne Zusatz seien nur eigentliche Elemente verstanden.

[2]) Mit Ausnahme der isotropen Geraden, welche die Schnittpunkte von (Q) mit $[v_0]$ beschreiben.

[3]) Zu derselben Darstellung gelangt, von anderem Ausgangspunkte aus, *H. Beck* [L. 1] S. 50 bis 51; die weiteren Ausführungen dieses §, bei denen sich Wiederholungen (mehr oder weniger) bekannter Dinge nicht vermeiden lassen, sind daher ganz kurz gehalten.

(6) $$(\mathrm{I}) = ds^2 = -\tau^2 dp^2 + 2\varrho'\tau' dq^2,$$

mit der Diskriminante:

(7) $$D^2 = -2\tau^2\varrho'\tau'.$$

Von der weiteren differentialgeometrischen Behandlung sind somit die isotropen Ebenen $\tau = \text{const.}$ sowie die isotropen Kegel $\varrho = \text{const.}$ auszuschließen. Die zweite Fundamentalform der Fläche ist alsdann:

(8) $$(\mathrm{II}) = L dp^2 + 2M dp dq + N dq^2 = \frac{1}{D}\{-\tau^2\tau' dp^2 + \tau(\varrho'\tau'' - \varrho''\tau')dq^2\}.$$

Die Parameterlinien $p = \text{const.}$ (die Profilkurven oder Meridiane) *und* $q = \text{const.}$ (die parabolischen Kreise oder Parallelkreise) *sind* somit *die Krümmungslinien der Fläche. Die Flächennormalen längs eines Parallelkreises bilden einen parabolischen Drehkegel, dessen Spitze auf* (g) *liegt; gleichzeitig ist dieser Punkt Hauptkrümmungsmittelpunkt der Fläche für alle Punkte des Parallelkreises, während der zweite Hauptkrümmungsmittelpunkt eines Flächenpunktes mit dem zu ihm gehörigen Krümmungsmittelpunkt der Profilkurve zusammenfällt.*

*Gauß*sche und mittlere Krümmung K, H der Fläche sind durch die Formeln:

(9) $$K = -\frac{\varrho'\tau'' - \varrho''\tau'}{4\tau\varrho'^2\tau'}, \quad H = \frac{1}{2\varrho'\tau'\cdot D}\{\tau(\varrho'\tau'' - \varrho''\tau') + 2\varrho'\tau'^2\}$$

bestimmt.

3. *Geradlinige Drehflächen. Unterwirft man eine Gerade* (a), die nicht isotrope Gerade der Ebene $[v_0]$ ist, *der Drehungsgruppe* $\{D_i\}$, *so entstehen folgende Typen von geradlinigen Drehflächen*:

A. Liegt (a) in einer der Normalebenen $[v]$ ($\tau = \text{const.}$), so ist diese *Ebene* Drehfläche.

B. Liegt (a) in keiner dieser Normalebenen und:

a) schneidet die Drehachse in einem eigentlichen Punkte S, so entsteht ein *parabolischer oder isotroper Kegel* mit S als Spitze, je nachdem (a) anisotrop oder isotrop ist;

b) ist zur Achse (g) windschief, so entsteht eine *Fläche 2. Ordnung*, deren Gleichung sich, bei passender Wahl der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, auf die Form

(10) $$(X/X) + \varkappa(X/\mathfrak{c})^2 = l^2$$

bringen läßt; sie ist eine Kugel, falls $\varkappa$ verschwindet, l bedeutet den von Null verschiedenen senkrechten Abstand der Geraden (g), (a).

4. *Drehflächen fester Krümmung* K_0. Zu dem Werte $K_0 = 0$ gehören die *parabolischen Drehkegel*, deren Spitzen auf (g) liegen. Einem Werte $K_0 \neq 0$ entsprechen, außer den *Kugeln* (mit den Mittelpunkten auf (g)), die *Flächen einer* ∞^1*-fachen Schar, die zueinander und der Fläche*:

(11) $$(X/w) = \frac{1}{\sqrt{K_0}}\left(u(\mathfrak{c}/w) + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} u\{-\tfrac{1}{2}v^2\mathfrak{c} + v\mathfrak{b} + \mathfrak{a}/w\}\right)$$

kongruent sind, deren Gleichung auch in der Form geschrieben werden kann:

$$(12) \qquad 2\,(X/\mathfrak{c})\sqrt{K_0} + \operatorname{tg}\left(\frac{(X/X)\sqrt{K_0}}{2(X/\mathfrak{c})}\right) = 0.$$

Die zu verschiedenen Werten von K_0 gehörenden Flächen sind somit zueinander ähnlich.

5. *Minimalflächen.* Als Lösung der Differentialgleichung (9) kommt das Integral $\varrho + \alpha\tau^3 + \beta = 0$, $\alpha \neq 0$, β Konstante, in Betracht, das sich durch passende Wahl der Koordinaten auf die Form $2\varrho - \tau^3 = 0$ bringen läßt. *Demnach sind alle Rotationsminimalflächen zueinander und der Fläche*

$$(13) \qquad (X/X) - (X/\mathfrak{c})^4 = 0$$

kongruent, die durch Drehung der Profilkurve

$$(P/w) = \tfrac{1}{2}u^3(\mathfrak{c}/w) - u(\mathfrak{a}/w)$$

entsteht [4]).

§ 2. Die Schraubenflächen $[S_i]$.

6. *Kanonische Koordinaten der Gruppe $\{S_i\}$.* Führt man an Stelle gewöhnlicher Euklidischer Koordinaten die Parameter ein:

(1) $\sigma = -(X/\mathfrak{c})$, $\tau = -(X/\mathfrak{c})^2 - 2(X/\mathfrak{b})$, $3\varrho = (X/\mathfrak{c})^3 + 3(X/\mathfrak{b})(X/\mathfrak{c}) - 3(X/\mathfrak{a})$,

so folgt durch Auflösung:

(2) $(X/\mathfrak{c}) = -\sigma$, $(X/\mathfrak{b}) = -\tfrac{1}{2}(\sigma^2 + \tau)$, $(X/\mathfrak{a}) = \tfrac{1}{6}\sigma^3 + \tfrac{1}{2}\sigma\tau - \varrho$;

diese Parameter seien als *kanonische Koordinaten der Schraubungsgruppe $\{S_i\}$* verwendet. *Sind $\varrho_0, \sigma_0, \tau_0$ die Koordinaten eines Punktes Q, so sendet die Gruppe durch Q eine Bahnkurve (X), deren Punkte X die Koordinaten:*

$$(3) \qquad \boxed{\varrho = \varrho_0, \quad \sigma = \sigma_0 + p, \quad \tau = \tau_0}$$

haben, und (3) *ist die Darstellung der Gruppe in diesen Koordinaten.*

Zu der Gruppe $\{S_i\}$ gehören die *Profilebenen* $[\pi]$ ($\sigma = \text{const.}$), die *Schraubenzylinder* $[C]$ ($\tau = \text{const.}$) (unter denen der *Hauptzylinder* ($\tau = 0$) ausgezeichnet ist), die *Schraubenflächen* $[L]$ ($\varrho = \text{const.}$); ferner die ω^2-fache Schar der *Bahnschraubenlinien* ($\tau = \text{const.}$, $\varrho = \text{const.}$), die *lineare Kongruenz $\{\mathfrak{N}\}$ der Normalen der Schraubenzylinder* [5]) ($\varrho = \text{const.}$, $\sigma = \text{const.}$) sowie der *Parallelstrahlenbündel* $\sigma = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ Die Tangenten aller Bahnschraubenlinien der Gruppe bilden einen quadratischen Komplex; ist (t) die Tangente einer Schraubenlinie im Punkte $Q(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$ und $X^*(\varrho^*, \sigma^*, \tau^*)$ ein Punkt von (t), so bestehen die Beziehungen:

$$(4) \qquad \sigma^* = \sigma_0 + q, \quad \tau^* = \tau_0 - q^2, \quad \varrho^* = \varrho_0 - \tfrac{1}{3}q^3,$$

die Gleichungen der Tangente (t) (bei variablem q).

---

[4]) Diese Fläche ist von *E. Geiser* gefunden und von *E. Study* als Drehfläche erkannt und eingehend besprochen worden (vgl. [L. 3] S. 19 f.).

[5]) Mit der Gruppe $\{S_i\}$ sind ein Nullsystem sowie ein linearer Komplex verknüpft; die Kongruenz $\{\mathfrak{N}\}$ besteht aus den Komplexstrahlen, welche die Schraubungsachse (f_u), die uneigentliche Gerade der Profilebenen $\sigma = \text{const.}$, treffen; (f_u) ist doppelte Leitgerade der Kongruenz. Die Kongruenzstrahlen durch die Punkte einer Bahnschraubenlinie erfüllen eine Schraubenfläche $\varrho = \text{const.}$

7. *Darstellung der Schraubenflächen* $[S_i]$. Ist $Q(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$ ein Punkt einer analytischen Kurve (Q), die etwa durch einen Parameter u analytisch dargestellt sei, so sind nach (1) $\varrho_0, \sigma_0, \tau_0$ analytische Funktionen von u, und falls nicht ϱ_0 und τ_0 konstant sind, also (Q) selbst eine Bahnschraubenlinie ist, *stellen* nach (3) *die Gleichungen*

$$(5) \qquad \sigma(=v) = \sigma_0 + p, \quad \tau = \tau_0(u), \quad \varrho = \varrho_0(u)$$

die Schraubenlinien sämtlicher Punkte von (Q), also *die von der Kurve* (Q) *erzeugte Schraubenfläche* dar; es ist daher nach (2), wenn X ein Punkt dieser Fläche:

$$(6) \quad (X/\mathfrak{c}) = -v, \quad (X/\mathfrak{b}) = -\tfrac{1}{2}(v^2 + \tau(u)), \quad (X/\mathfrak{a}) = \tfrac{1}{6}v^3 + \tfrac{1}{2}v \cdot \tau(u) - \varrho(u)$$

oder:

$$(7) \qquad \boxed{(X/w) = -\{\tfrac{1}{6}v^3 + \tfrac{1}{2}v\tau - \varrho\}\,(\mathfrak{c}/w) + \tfrac{1}{2}(v^2 + \tau)(\mathfrak{b}/w) + v(\mathfrak{a}/w)}$$

die Darstellung der Fläche in Parametern u, v.

Die Profilebenen $v = \text{const.}$ schneiden die Fläche in den zueinander kongruenten Profilkurven, als deren Repräsentant etwa die Kurve $(v = 0)$:

$$(8) \qquad (P/w) = \varrho(\mathfrak{c}/w) + \tfrac{1}{2}\tau(\mathfrak{b}/w)$$

dienen kann, und die Fläche entsteht auch durch Verschraubung einer dieser Kurven. *Daher können in* (7) $\varrho(u)$ *und* $\tau(u)$ *als beliebige*, nicht gleichzeitig konstante *analytische Funktionen* mit gemeinsamem Existenzbereich *angenommen werden*, und nach (1) ist:

$$(9) \quad \tau = -(X/\mathfrak{c})^2 - 2(X/\mathfrak{b}), \quad 3\varrho = (X/\mathfrak{c})^3 + 3(X/\mathfrak{b})(X/\mathfrak{c}) - 3(X/\mathfrak{a}).$$

Insbesondere besteht bei algebraischen Schraubenflächen zwischen ϱ *und* τ *eine algebraische Abhängigkeit.*

Die einfachsten algebraischen Schraubenflächen sind die in Nr. 6 eingeführten Schraubenzylinder $[C]$ und Schraubenflächen $[L]$.

8. *Die Fundamentalformen der Flächen* $[S_i]$. Zu der Parameterdarstellung (7) gehört die erste Fundamentalform [die Striche bedeuten die Ableitung nach u]:

$$(10) \qquad (I) = ds^2 = -\tfrac{1}{4}\tau'^2 du^2 - 2\varrho' du\,dv + \tau\,dv^2$$

mit der Diskriminante

$$(11) \qquad D^2 = -\tfrac{1}{4}\tau\tau'^2 - \varrho'^2.$$

Von der weiteren differentialgeometrischen Behandlung seien, wie üblich, die Flächen $D \equiv 0$ ausgeschlossen, also die durch die Gleichung

$$(12) \qquad \tau^3 + 9(\varrho - \varrho_0)^2 = 0$$

bestimmten Flächen; es sind dies nach (4) die *Tangentenflächen der (isotropen) Schraubenlinien des Hauptzylinders*, also der Kurven $\varrho = \varrho_0$, $\tau = 0$.

Die zweite Fundamentalform ist alsdann:

$$(13) \qquad (II) = L du^2 + 2M du\,dv + N dv^2$$
$$= \frac{1}{D}\{\tfrac{1}{2}(\varrho'\tau'' - \varrho''\tau')du^2 + \tfrac{1}{2}\tau'^2 du\,dv + \varrho' dv^2\}.$$

Ferner sind

$$(14) \quad H = \frac{1}{4D^3}\{2\tau(\varrho'\tau'' - \varrho''\tau') + \varrho'\tau'^2\}, \quad K = \frac{1}{16D^4}\{8\varrho'(\varrho'\tau'' - \varrho''\tau') - \tau'^4\}$$

die mittlere und *Gauß*sche Krümmung der Fläche $[S_i]$.

§ 3. Die geradlinigen Schraubenflächen.

9. *Die geschlossenen Regelschraubenflächen. Durch Verschraubung einer Geraden* (a) *entsteht eine Regelschraubenfläche*; von den Schraubenzylindern $[C]$, die durch eine Gerade des Parallelstrahlenbündels $\sigma = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ erzeugt werden, sei im folgenden nicht mehr die Rede. *Je nachdem nun die Gerade* (a) *in einer der Profilebenen* $\sigma = \text{const.}$ *liegt oder nicht, entstehen die geschlossenen bzw. die offenen Regelschraubenflächen.*

Liegt die Gerade (a) in einer der Profilebenen, so trifft sie den Hauptzylinder $\tau = 0$ in einem Punkte O, in den das Tetraeder $O(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ der kanonischen Koordinaten (vgl. Nr. 6) verlegt sei. Gibt der Vektor a die Richtung der Geraden (a) an, so ist alsdann:

$$(1) \qquad (a/\mathfrak{c}) = 0, \quad (a/\mathfrak{b}) \neq 0,$$

so daß, bei variablem u,

$$(2) \qquad (Q/w) = u(a/w)$$

der Ortsvektor eines beliebigen Punktes Q von (a) ist. Der Punkt Q hat, nach Nr. 6 (1), die kanonischen Koordinaten:

$$(3) \qquad \sigma_0 = 0, \quad \tau_0 = -2u(a/\mathfrak{b}), \quad \varrho_0 = -u(a/\mathfrak{a}),$$

und nach Nr. 7 (5) *stellen die Gleichungen*:

$$(4) \qquad \sigma = v, \quad \tau = -2u(a/\mathfrak{b}), \quad \varrho = -u(a/\mathfrak{a})$$

die von der Geraden (a) *erzeugte Regelschraubenfläche in Parametern* u, v *dar*; durch Elimination folgt die Flächengleichung:

$$(5) \qquad \tau(a/\mathfrak{a}) - 2\varrho(a/\mathfrak{b}) = 0.$$

Ist nun $(a/\mathfrak{a}) = 0$, also (a) zum Vektor $\mathfrak{b}$ parallel, so *ist die Gerade* (a) *der durch* O *gehende Strahl der Kongruenz* $\{\mathfrak{N}\}$, und erzeugt die *gerade, geschlossene Regelschraubenfläche* $[L]$ (*Liesche Minimaldoppelfläche*):

$$(6) \qquad \varrho = \tfrac{1}{3}(X/\mathfrak{c})^3 + (X/\mathfrak{b})(X/\mathfrak{c}) - (X/\mathfrak{a}) = 0.$$

Im Falle $(a/\mathfrak{a}) \neq 0$, wenn also (a) *der Kongruenz* $\{\mathfrak{N}\}$ *nicht angehört*, stellt (5) die *schiefe, geschlossene Regelschraubenfläche*:

$$(7) \qquad \begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\tau(a/\mathfrak{a}) + \varrho(a/\mathfrak{b}) &= \{\tfrac{1}{2}(X/\mathfrak{c})^2 + (X/\mathfrak{b})\}(a/\mathfrak{a}) \\ &+ \{\tfrac{1}{3}(X/\mathfrak{c})^3 + (X/\mathfrak{b})(X/\mathfrak{c}) - (X/\mathfrak{a})\}(a/\mathfrak{b}) = 0 \end{aligned}$$

dar (die keine Minimalfläche ist, wie sich in § 5 ergeben wird).

Beide Flächentypen sind von der dritten Ordnung und Klasse und gehören zu den *Cayley*schen Regelflächen, ihre Erzeugenden treffen die Schraubungsachse. Der Ort der singulären Flächenpunkte (d. h. der Punkte mit isotroper Tangentialebene) ist nach Nr. 8 (11) die Schraubenlinie $\tau = -\left[\frac{(a/\mathfrak{a})}{(a/\mathfrak{b})}\right]^2$, $\varrho = -\frac{1}{2}\left[\frac{(a/\mathfrak{a})}{(a/\mathfrak{b})}\right]^3$, also bei den geraden Regelflächen deren (isotrope) Hauptschraubenlinie $\varrho = \tau = 0$, bei den schiefen eine anisotrope Bahnschraubenlinie. Bestimmt man zu den ∞^1 Lagen, die (a) noch annehmen kann, diese singulären Örter, so erfüllen sie die Fläche:

(8) $$4\varrho^2 + \tau^3 = 0\,,$$

eine Minimalschraubenfläche sechster Ordnung und Klasse (vgl. § 6).

10. *Die offenen Regelschraubenflächen.* Liegt die Gerade (a) in keiner der Profilebenen, so gibt es stets einen Schraubenzylinder, der (a) berührt; der Berührungspunkt Q^* heiße der *Kehlpunkt* der Geraden (a). Der durch Q^* gehende Strahl der Kongruenz $\{\mathfrak{N}\}$ trifft den Hauptzylinder in einem Punkte O, in den das Tetraeder $O(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ der kanonischen Koordinaten verlegt sei. Alsdann hat der Punkt Q^* die Koordinaten:

(9) $$\sigma = 0, \quad \tau = \tau^*, \quad \varrho = 0,$$

und der Vektor a, der die Richtung der Geraden (a) angibt, läßt sich in der Form: $(a/w) = -(a/\mathfrak{a})(\mathfrak{c}/w) - (a/\mathfrak{c})(\mathfrak{a}/w)$, $(a/\mathfrak{c}) \neq 0$ schreiben, so daß, bei variablem u:

(10) $$(Q/w) = (Q^*/w) + u\left\{\frac{(a/\mathfrak{a})}{(a/\mathfrak{c})}(\mathfrak{c}/w) + (\mathfrak{a}/w)\right\}$$

den Ortsvektor der Punkte Q von (a) darstellt; die kanonischen Koordinaten von Q sind:

(11) $\sigma_0 = u, \quad \tau_0 = \tau^* - u^2, \quad \varrho_0 = \frac{1}{3}u(\tau^* - \bar{\tau} - u^2)$, wo $-\bar{\tau} = \frac{1}{2}\tau^* + 3\frac{(a/\mathfrak{a})}{(a/\mathfrak{c})}$.

Daher folgt denn nach Nr. 6 (3) für die Punkte $X(\varrho, \sigma, \tau)$ der durch (a) erzeugten Schraubenfläche:

(12) $$\sigma = u + v, \quad \tau = \tau^* - u^2, \quad \varrho = \tfrac{1}{3}u(\tau^* - \bar{\tau} - u^2)\,,$$

und hieraus durch Elimination von u die *Gleichung der offenen Regelschraubenfläche, einer Fläche vierter Ordnung* $[R_4]$:

(13) $$9\varrho^2 + (\tau - \tau^*)(\tau - \bar{\tau})^2 = 0.$$

Da nach (10) $(a/a) = -2(a/\mathfrak{a})(a/\mathfrak{c})^2$, so folgt, *daß je nach dem Verschwinden oder Nichtverschwinden von* $\bar{\tau} + \frac{1}{2}\tau^*$ *die Gerade* (a) *isotrop oder anisotrop ist. Der Schraubenzylinder* $\tau = \bar{\tau}$ *schneidet* $[R_4]$ *in der Schraubenlinie* $\varrho = 0$, $\tau = \bar{\tau}$, *der Doppelkurve der Fläche, die daher auch durch Verschraubung einer Bisekante dieser Schraubenlinie erzeugt werden kann.*

Dieses Resultat soll nun direkt abgeleitet werden. Sind $P^{(1)}(\varrho_1, \sigma_1, \tau_1)$ und $P^{(2)}(\varrho_2, \sigma_2, \tau_2)$ zwei Punkte, so stellt $(P/w) = \varkappa(P^{(1)}/w) + (1 - \varkappa)(P^{(2)}/w)$ bei veränderlichem $\varkappa$ die Punkte P der Geraden $P^{(1)}P^{(2)}$ dar, und die Koordinaten ϱ, σ, τ von P ergeben sich nach einfacher Rechnung:

(14) $\sigma = \varkappa\sigma_1 + (1 - \varkappa)\sigma_2, \quad \tau = \varkappa\tau_1 + (1 - \varkappa)\tau_2 + \varkappa(1 - \varkappa)(\sigma_1 - \sigma_2)^2,$
$\varrho = \varkappa\varrho_1 + (1 - \varkappa)\varrho_2 - \frac{1}{6}\varkappa(1 - \varkappa)(1 - 2\varkappa)(\sigma_1 - \sigma_2)^3 - \frac{1}{2}\varkappa(1 - \varkappa)(\sigma_1 - \sigma_2)(\tau_1 - \tau_2).$

Hieraus folgt in unserem Falle: Sind $(\sigma_1, \bar{\varrho}, \bar{\tau})$, $(\sigma_2, \bar{\varrho}, \bar{\tau})$ zwei Punkte der Schraubenlinie $(\bar{\varrho}, \bar{\tau})$, so hat jeder Punkt Q der Bisekante die Koordinaten:

(15) $$\sigma_0 = \varkappa\sigma_1 + (1 - \varkappa)\sigma_2, \quad \tau_0 = \bar{\tau} + \varkappa(1 - \varkappa)(\sigma_1 - \sigma_2)^2,$$
$$\varrho_0 = \bar{\varrho} - \tfrac{1}{6}\varkappa(1 - \varkappa)(1 - 2\varkappa)(\sigma_1 - \sigma_2)^3,$$

insbesondere der Mittelpunkt Q^* die Koordinaten:

(16) $$\sigma^* = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \tau^* = \bar{\tau} + \tfrac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2, \quad \varrho^* = \bar{\varrho},$$

woraus denn:

(17) $$\tau_0 - \tau^* = -\tfrac{1}{4}(1 - 2\varkappa)^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2$$

folgt. Die Bahnschraubenlinien der Punkte Q sind nun durch die Gleichungen $\varrho = \varrho_0$, $\sigma = \sigma_0 + v$, $\tau = \tau_0$ gegeben, aus denen, nach (15) und (17) durch Elimination von $\varkappa$, die Gleichung der Regelfläche:

(18) $$9(\varrho - \bar{\varrho})^2 + (\tau - \tau^*)(\tau - \bar{\tau})^2 = 0$$

sich ergibt, die durch eine Koordinatentransformation in die Form (13) übergeführt werden kann. Hiermit ist das zuvor ausgesprochene Resultat bestätigt. *Die Doppelkurve der* $[R_4]$ *wird zur Rückkehrkante*, wenn $\bar{\tau} = \tau^*$ ist; dann folgt aber aus (16) $\sigma_1 = \sigma_2$, d. h. *die Bisekante wird zur Tangente der Schraubenlinie* $(\bar{\varrho}, \bar{\tau})$, und $[R_4]$ ist alsdann die *Tangentenfläche einer Bahnschraubenlinie*, deren Gleichung (nach (18)):

(19) $$9(\varrho - \bar{\varrho})^2 + (\tau - \bar{\tau})^3 = 0$$

nun aus (15) nur durch einen Grenzübergang gewonnen werden kann; dieser ist aber in den Formeln Nr. 6 (4) bereits geleistet, durch Elimination von q folgt aus ihnen genau die oben angegebene Gleichungsform (19), welche also die *Torse* einer *anisotropen* $(\bar{\tau} \neq 0)$ *oder isotropen* $(\bar{\tau} = 0)$ *Schraubenlinie darstellt.*

Bei den Regelflächen, die nicht Torsen sind, ist die Bahnschraubenlinie des Kehlpunktes P^*, die *Kehlschraubenlinie*, zugleich Striktionslinie der Fläche, falls deren Erzeugende anisotrop sind $(\bar{\tau} + \frac{1}{2}\tau^* \neq 0)$.

§ 4. Schraubenflächen fester Krümmung.

11. Zur Bestimmung der Flächen fester *Gauß*scher Krümmung K_0 dient nach Nr. 8 (14) die Differentialgleichung:

(1) $$8\varrho'(\varrho'\tau'' - \varrho''\tau') - \tau'^4 - 16\,K_0 D^4 = 0, \quad 4\,D^2 = -\tau\tau'^2 - 4\,\varrho'^2.$$

Sieht man von den Flächen $\tau =$ konst. ab, die als Zylinder zu den Flächen verschwindender Krümmung gehören, so kann man, wenigstens in einem gewissen Bereiche, τ statt u als Variable einführen, und hat alsdann die Gleichungen:

(2) $$4\,D^2 = -\tau - 4\left(\frac{d\varrho}{d\tau}\right)^2, \quad 4\,K_0 + \frac{d}{d\tau}(D^{-2}) = 0.$$

Für die Flächen vom Krümmungsmaße Null ist daher $D^2 =$ const. $= -\frac{1}{4}\tau_0 \neq 0$, und es folgt:

(3) $$9(\varrho - \varrho_0)^2 + (\tau - \tau_0)^3 = 0$$

als Gleichung der Flächen; es sind dies also, wie zu erwarten war, die Torsen der anisotropen Bahnschraubenlinien.

Im Falle $K_0 \neq 0$ folgt aus (2): $D^{-2} = -4(K_0\tau + a)$, $a =$ const., und:

(4) $$4\left(\frac{d\varrho}{d\tau}\right)^2 = \frac{1 - a\tau - K_0\tau^2}{K_0\tau + a},$$

so daß im allgemeinen τ eine elliptische Funktion von ϱ sein wird. *Es gibt demnach*

transzendente Flächen festen Krümmungsmaßes, die durch elliptische Funktionen dargestellt werden können.

12. *Die Schraubenröhrenfläche.* Das elliptische Differential (4) wird rational, wenn $a^2 + 4K_0 = 0$, $(K_0 \neq 0)$ gewählt ist. Setzt man alsdann:

$$(5) \qquad a = \frac{4}{\tau^*}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{\tau^*}{2}\right)^2 = -\frac{1}{K_0},$$

so folgt als Integral von (4):

$$(6) \qquad 9(\varrho - \varrho^*)^2 + (\tau - \tau^*)(\tau + \tfrac{1}{2}\tau^*)^2 = 0, \qquad \varrho^* = \text{const.}$$

Die Fläche besteht aus zwei Mänteln, den beiden Werten von τ^* entsprechend; jeder dieser Mäntel ist aber nach Nr. 3 (13) eine *offene Regelschraubenfläche* $[R_4]$ *mit isotropen Erzeugenden. Daher bilden die beiden Mäntel die Hüllfläche einer Schar von Kugeln mit dem festen Radiusquadrat* $-\frac{1}{4}\tau^{*2}$, *deren Mittelpunkte auf der Hauptschraubenlinie* $(\tau = 0)$ *liegen*, und die man als *Schraubenröhrenfläche* bezeichnen kann [6]).

Dieses Resultat läßt sich leicht direkt bestätigen. Ist $X(\varrho, \sigma, \tau)$ ein Punkt der um den Mittelpunkt $M(\varrho^*, \sigma^*, \tau = 0)$ beschriebenen Kugel:

$$(X - M/X - M) + \tfrac{1}{4}\tau^{*2} = 0 = -(X - M/\mathfrak{b})^2 - 2(X - M/\mathfrak{a})(X - M/\mathfrak{c}) + \tfrac{1}{4}\tau^{*2},$$

so folgt nach Nr. 6 (2) die Kugelgleichung in kanonischen Koordinaten:

$$(7) \qquad -\tfrac{1}{3}(\sigma^* - \sigma)^4 - 2\tau(\sigma^* - \sigma)^2 + 8(\varrho^* - \varrho)(\sigma^* - \sigma) + \tau^2 - \tau^{*2} = 0,$$

die bei veränderlichem σ^* zugleich die Kugelschar darstellt. Leitet man daher (7) nach σ^* ab: $-\frac{1}{3}(\sigma^* - \sigma)^3 - \tau(\sigma^* - \sigma) + 2(\varrho^* - \varrho) = 0$, und eliminiert aus beiden Gleichungen den Parameter $\sigma^* - \sigma$, so erhält man die Gleichung der Hüllfläche in der Form: $9(\varrho - \varrho^*)^2 + (\tau \mp \tau^*)(\tau \pm \frac{1}{2}\tau^*)^2 = 0$, die mit (6) übereinstimmt.

§ 5. Minimalschraubenflächen.

13. Zu den Minimalschraubenflächen gehören nach Nr. 8 (14) zunächst die Schraubenzylinder $\tau = \text{const.}$ sowie die *Lie*schen Schraubenflächen $\varrho = \text{const.}$[7]). Nach Ausschluß dieser Fälle bleibt als weitere Lösung der Differentialgleichung die folgende:

$$(1) \qquad 9(\varrho - \varrho_0)^2 + (1 - a)\tau^3 = 0, \quad \varrho_0, \quad a \neq 1 \text{ const.}$$

Hierbei ist der Wert $a = 0$ auszuschließen, der nach Nr. 8 (11) auf die Torsen isotroper Schraubenlinien führt (vgl. auch Nr. 10); die Gleichung der Fläche in gewöhnlichen Koordinaten lautet, wenn man noch durch eine Koordinatentransformation ϱ_0 zum Verschwinden bringt:

$$(2) \quad \{(X/\mathfrak{c})^3 + 3(X/\mathfrak{b})(X/\mathfrak{c}) - 3(X/\mathfrak{a})\}^2 - (1 - a)\{(X/\mathfrak{c})^2 + 2(X/\mathfrak{b})\}^3 = 0.$$

Diese *Fläche* 6. *Ordnung* soll nun eingehender untersucht werden.

---

[6]) Diese Serretsche Fläche ist von *E. Study* [L. 4] S. 278 untersucht und als Schraubenfläche bezeichnet worden.

[7]) Vgl. [L. 5] S. 147.

§ 6. Die Minimalschraubenflächen 6. Ordnung und 6. Klasse.

14. *Die isotropen Kurven der Fläche.* Führt man in die Flächengleichung Nr. 13 (1), in der $\varrho_0 = 0$ angenommen werden kann, statt a die neue Konstante

$$(1) \qquad 4\varkappa(1-\varkappa) = \frac{1}{a} \text{ ein, so folgt } \varkappa(1-\varkappa)(1-2\varkappa) \neq 0,$$

und die Gleichung geht über in:

$$(2) \qquad 36\,\varkappa(1-\varkappa)\,\varrho^2 - (1-2\varkappa)^2\,\tau^3 = 0.$$

Erklärt man ϱ in der Umgebung einer Stelle $\tau_0 \neq 0$ als eindeutige Funktion von τ, so ist nach Nr. 8 (10):

$$(3) \qquad \left\{ d\tau - \frac{2\varkappa}{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}\,\tau^{1/2}\,dv \right\}\left\{ d\tau + \frac{2(1-\varkappa)}{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}\,\tau^{1/2}\,dv \right\} = 0$$

die Differentialgleichung der isotropen Flächenkurven; es gehen somit durch den Punkt $X^0(v_0, \tau_0 \neq 0)$ die beiden, voneinander verschiedenen Kurven:

$$(4) \qquad \tau^{1/2} - \tau_0^{1/2} - \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}(v - v_0) = 0, \quad \tau^{1/2} - \tau_0^{1/2} + \frac{1-\varkappa}{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}(v - v_0) = 0.$$

Diese Kurven berühren den Hauptzylinder $\tau = 0$ je in einem Punkte:

$$P^{(1)}\left\{ v_1 = v_0 - \frac{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}{\varkappa}\,\tau_0^{1/2},\ \varrho_1 = \tau_1 = 0 \right\},$$

$$P^{(2)}\left\{ v_2 = v_0 + \frac{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}{1-\varkappa}\,\tau_0^{1/2},\ \varrho_2 = \tau_2 = 0 \right\},$$

die Punkte liegen auf der Schraubenlinie $\varrho = \tau = 0$, die als Schnittkurve von Hauptzylinder und Fläche selbst isotrope Flächenkurve ist; sie sei die *Hauptschraubenlinie* (L_H) der Fläche genannt.

Dem durch den Vektor $\varkappa P^{(1)} + (1-\varkappa)P^{(2)}$ bestimmten Punkte kommen nach Nr. 10 (14) die Koordinaten $v = v_0$, $\varrho = \varrho_0$, $\tau = \tau_0$ zu, d. h. er ist mit X^0 identisch. Sonach ergibt sich folgendes erste Resultat:

Sind $P(\sigma = p,\ \varrho = \tau = 0)$ *und* $Q(\sigma = q,\ \varrho = \tau = 0)$ *zwei voneinander verschiedene* $(p \neq q)$ *Punkte der Hauptschraubenlinie* (L_H), *so hat der Punkt* X, *der die Sehne* PQ *im Verhältnis* $\frac{\overline{QX}}{\overline{QP}} = \varkappa$ *teilt, die kanonischen Koordinaten* (vgl. Nr. 10 (14)):

$$(5) \qquad v = \varkappa p + (1-\varkappa)\,q, \qquad \tau = \varkappa(1-\varkappa)\,(p-q)^2,$$
$$\varrho = -\tfrac{1}{6}\varkappa(1-\varkappa)\,(1-2\varkappa)\,(p-q)^3,$$

liegt also auf der Fläche (2). *Hieraus folgt die neue Flächendarstellung*:

$$(6) \qquad (X/w) = \varkappa\{-\tfrac{1}{6}p^3\mathfrak{c} + \tfrac{1}{2}p^2\mathfrak{b} + p\mathfrak{a}/w\} + (1-\varkappa)\{-\tfrac{1}{6}q^3\mathfrak{c} + \tfrac{1}{2}q^2\mathfrak{b} + q\mathfrak{a}/w\}.$$

Da nun die Punkte P, Q voreinander nicht ausgezeichnet sind, so erhält man auch einen Flächenpunkt X', wenn man die Sehne QP im Verhältnis $\frac{\overline{PX'}}{\overline{PQ}} = \varkappa$, oder die Sehne PQ im Verhältnis $\frac{\overline{QX'}}{\overline{QP}} = 1 - \varkappa$ teilt, wie man aus (5) sofort bestätigt.

Die Fläche entsteht daher als Ort der Punkte, welche die Sehnen der Hauptschraubenlinie (L_H), wie man sagen könnte, „von beiden Seiten her", *im Verhältnis* $\varkappa$ *teilen*; sie sei daher als *Sehnenteilungsfläche* $[T_\varkappa]$ bezeichnet [8]).

Nach (6) *gehen durch den Punkt* $X(\tau \neq 0)$ *die beiden isotropen Flächenkurven* $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$, *also selbst Lyonsche Schraubenlinien*, die aber nicht gegenüber der die Fläche erzeugenden Gruppe $\{S_i\}$ invariant sind. *Diese Gleichung stellt daher zugleich eine Translationserzeugung der Fläche dar. Die Kurven* $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ *berühren den Hauptzylinder* $\tau = 0$ *in den Punkten* P, Q *der durch* X *gehenden Bisekante von* (L_H).

Durch einen Punkt Q von (L_H) geht zunächst die isotrope Flächenkurve (L_H) selbst. Nun liegen aber auf jeder Bisekante von (L_H) durch Q zwei Flächenpunkte X, X', und wegen des festen Wertes der Teilverhältnisse $\frac{\overline{QX}}{\overline{QP}} = \varkappa$, $\frac{\overline{QX'}}{\overline{QP}} = 1 - \varkappa$ sind die Örter dieser Punkte zwei zu (L_H) in bezug auf Q ähnlich gelegene Kurven, also selbst zwei isotrope Schraubenlinien. *Demnach ist* (L_H) *der Ort der singulären Flächenpunkte* $(D = 0)$; *durch jeden Punkt* Q *gehen außer* (L_H) *noch zwei isotrope Flächenkurven mit gemeinsamer Tangente in* Q.

Der Ort der Bisekanten von (L_H) durch den festen Punkt Q ist der Drehkegel (man verlege für den Augenblick den Vektorenursprung O nach Q): $(X/X) - \frac{1}{3}(X/\mathfrak{b})^2 = \frac{1}{3}\varkappa(1-\varkappa)pq(p-q)^2 = 0$, der also die Fläche $[T_\varkappa]$ in den isotropen Kurven $p = 0$, $q = 0$, $p - q = 0$ schneidet, welche sämtlich durch Q gehen. Demnach ist das zuvor ausgesprochene Resultat bestätigt; *die durch einen Punkt* Q *von* (L_H) *gehenden isotropen Flächenkurven liegen auf dem Bisekantenkegel mit* Q *als Spitze.*

Die Fläche $[T_\varkappa]$ *ist der Tangentenfläche von* (L_H) *einbeschrieben,* (L_H) *also Rückkehrkante der Fläche.*

15. *Algebraische Untersuchung der Fläche.* In homogenen Koordinaten ist nach (6):

$$(7)\quad \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 : \mathfrak{x}_4 = (X/\mathfrak{c}) : (X/\mathfrak{b}) : (X/\mathfrak{a}) : 1$$
$$= -\{\varkappa p + (1-\varkappa)q\} : -\tfrac{1}{2}\{\varkappa p^2 + (1-\varkappa)q^2\} : \tfrac{1}{6}\{\varkappa p^3 + (1-\varkappa)q^3\} : 1$$

eine Parameterdarstellung der eigentlichen Punkte der Fläche $[T_\varkappa]$, aus der, in Übereinstimmung mit (2), die Flächengleichung sich ergibt:

$$(8)\quad 4\varkappa(1-\varkappa)\{\mathfrak{x}_1^3 + 3\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4 - 3\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4^2\}^2 + (1-2\varkappa)^2\{\mathfrak{x}_1^2 + 2\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4\}^3 = 0.$$

Ist $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_4\mathfrak{x}_4 = 0$ die Ebenengleichung, so folgen nach einfacher Rechnung die Parameterdarstellung:

$$(9)\quad \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 : \mathfrak{x}_4 = -6pq : 6(p+q) : 12 : \{\varkappa p^2(p-3q) + (1-\varkappa)q^2(q-3p)\}$$

sowie die Gleichung:

$$(10)\quad \{\mathfrak{x}_2^3 + 3\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 - 3\mathfrak{x}_4\mathfrak{x}_3^2\}^2 - (1-2\varkappa)^2\{\mathfrak{x}_2^2 + 2\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3\}^3 = 0$$

---

[8]) Zu dem nach (1) ausgeschlossenen Werte $\varkappa = \frac{1}{2}$ gehört bekanntlich die *Lie*sche Minimaldoppelfläche, wie auch aus (5) sofort erhellt.

in Ebenenkoordinaten. *Die Fläche* $[T_\varkappa]$ *ist somit von der sechsten Ordnung und Klasse*[9]). Der Schnitt der beiden Flächen $\mathfrak{X}_1^3 + 3\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4 - 3\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_4^2 = 0$, $\mathfrak{X}_1^2 + 2\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4 = 0$, der *Lie*schen Schraubenfläche $[L]$ und des Hauptzylinders, ist der Ort der singulären Punkte von $[T_\varkappa]$. Es sind dies die Gerade $(f_u)(\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_4 = 0)$, die Schraubungsachse der Gruppe, sowie die Hauptschraubenlinie (L_H) (in (7) die Kurve $p = q$); beide Örter haben den Punkt F_u, den Fundamentalpunkt der Gruppe, gemeinsam, (f_u) ist Tangente von (L_H) in F_u, $\mathfrak{X}_4 = 0$ die zugehörige Schmiegebene (die uneigentliche Ebene $[\varepsilon_u]$). Das Koordinatentetraeder ist also ein Schmiegtetraeder der Kurve (L_H). Die Fläche $[T_\varkappa]$ hat, wie bereits gesagt, die Schraubenlinie (L_H) zur Rückkehrkurve. *Der Punkt* F_u *ist vierfacher, die übrigen Punkte von* (f_u) *sind dreifache Flächenpunkte; alle Punkte von* (f_u) *sind uniplanar, mit* $[\varepsilon_u]$ *als Tangentialebene.* Die Geraden der Ebene $[\varepsilon_u]$ schneiden (berühren) die Fläche in, sechsfach zu zählenden, Punkten von (f_u).

Diese Singularitäten der Fläche prägen ihren ebenen Schnitten besondere Eigenschaften auf; es seien nur behandelt die *Schnitte mit den Profilebenen* (den Ebenen durch (f_u)), *den Tangentialebenen des Hauptzylinders* sowie den *Schmiegebenen* von (L_H), wofür unbeschadet der Allgemeinheit die Ebenen $\mathfrak{X}_1 = 0$, $\mathfrak{X}_2 = 0$, $\mathfrak{X}_3 = 0$ genommen werden können; diese Ebenen sind die Flächen des von $O(0:0:0:1)$ ausgehenden Dreikants der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, und zwar ist $(\mathfrak{a})$ die Tangente von (L_H), $(\mathfrak{b})$ der durch O gehende Strahl der Kongruenz $\{\mathfrak{N}\}$ (vgl. Nr. 6), $(\mathfrak{c})$ verbindet O mit F_u.

Die Ebene $\mathfrak{X}_1 = 0$ schneidet $[T_\varkappa]$ außer in der dreifach zählenden Geraden (f_u) in der *Kurve dritter Ordnung und Klasse*:

$$9\varkappa(1-\varkappa)\mathfrak{X}_3^2\mathfrak{X}_4 + 2(1-2\varkappa)^2\mathfrak{X}_2^3 = 0\,; \tag{11}$$

diese Kurve hat in O eine Spitze mit der Geraden $(\mathfrak{b})$ als Spitzentangente, in F_u einen Wendepunkt mit (f_u) als Wendetangente, und ist durch diese Eigenschaften im wesentlichen bestimmt. Die Fläche $[T_\varkappa]$ entsteht durch Verschraubung dieser Profilkurve.

Die Ebene $\mathfrak{X}_2 = 0$ berührt den Hauptzylinder in O, trifft $[\varepsilon_u]$ in einer Geraden (h_u), welche den a. K. in G_u und F_u schneidet, und trifft die Fläche *in dem Paar (zueinander kongruenter) Kurven dritter Ordnung und Klasse*:

$$\mathfrak{X}_1^3 - \lambda\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_4^2 = 0, \qquad \mathfrak{X}_1^3 - \mu\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_4^2 = 0, \qquad \text{wo} \tag{12}$$

$$\lambda + \mu = 24\,\varkappa(1-\varkappa), \quad \lambda\mu = 36\,\varkappa(1-\varkappa) \qquad \text{und}$$

$$(\lambda-\mu)^2 = -144\,\varkappa(1-\varkappa)(1-2\varkappa)^2 \neq 0.$$

Jede dieser Kurven hat in O einen Wendepunkt mit $(\mathfrak{a})$ als Wendetangente, in F_u eine Spitze mit (h_u) als Spitzentangente.

Die Ebene $\mathfrak{X}_3 = 0$, die Schmiegebene von (L_H) in O, schneidet $[\varepsilon_u]$ in der Geraden (g_u), der Tangente des a. K. in G_u, welche den Pol H_u von (h_u) bezüglich des a. K. enthält. Die Schnittkurve mit der Fläche besteht aus dem *Tripel voneinander verschiedener Parabeln*:

---

[9]) Die isotropen Flächenkurven haben den Rang vier, der absolute Kegelschnitt (a. K.) hat auf ihren Tangentenflächen die Multiplizität eins; daher ist nach *S. Lie*, Beiträge zur Theorie der Minimalflächen I, Math. Annalen Bd. 14 (1879) S. 351 die Klasse der Fläche gleich sechs.

$$(13)\qquad \{\mathfrak{X}_1^2 + \alpha\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4\}\{\mathfrak{X}_1^2 + \beta\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4\}\{\mathfrak{X}_1^2 + \gamma\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4\} = 0, \qquad \text{wo}$$
$$\alpha+\beta+\gamma = 6, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 12(1-\varkappa+\varkappa^2), \quad \alpha\beta\gamma = 8(1-2\varkappa)^2,$$
$$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 = -2^6\cdot 3^2\varkappa^2(1-\varkappa)^2(1-2\varkappa)^2 \neq 0.$$

Diese Parabeln gehören dem Kegelschnittbüschel an, das in O die Gerade $(\mathfrak{a})$, in H_u die Gerade (g_u) berührt.

16. *Zweite Parameterdarstellung der Fläche.* Vermöge der Darstellung (6) werden:

$$(14)\qquad \begin{gathered} E_1 = G_1 = 0, \quad F_1 = \tfrac{1}{2}\varkappa(1-\varkappa)(p-q)^2, \quad D_1^2 = -F_1^2, \\ D_1L_1 = \tfrac{1}{2}\varkappa^2(1-\varkappa)(p-q)^2, \quad M_1 = 0, \quad D_1N_1 = -\tfrac{1}{2}\varkappa(1-\varkappa)^2(p-q)^2 \end{gathered}$$

die Fundamentalgrößen der Fläche für die Parameter p, q. Hieraus ergeben sich das *Gauß*sche Krümmungsmaß:

$$(15)\qquad K = -\frac{4}{\varkappa(1-\varkappa)}\frac{1}{(p-q)^4}$$

sowie die Differentialgleichungen:

$$(16)\qquad \varkappa dp^2 + (1-\varkappa)dq^2 = 0, \qquad \varkappa dp^2 - (1-\varkappa)dq^2 = 0$$

der Krümmungs- bzw. Asymptotenlinien, deren erste in den ursprünglichen Parametern die Form:

$$(16\,a)\qquad 4\tau dv^2 + d\tau^2 = 0$$

besitzt. Nun hat die Ebene, welche den Hauptzylinder längs einer Erzeugenden $v = \bar{v}$, $\tau = 0$ berührt, in kanonischen Koordinaten die Gleichung $(v-\bar{v})^2 + \tau = 0$; fordert man nun, daß sie den Punkt X^0 $(v = v_0, \tau = \tau_0 \neq 0)$ enthalte, so folgt

$$(17)\qquad v - v_0 = \pm(\sqrt{-\tau} - \sqrt{-\tau_0})$$

als *Gleichung der durch X^0 an den Hauptzylinder gehenden beiden Tangentialebenen. Diese Gleichung ist zugleich das Integral der Differentialgleichung* (16 a), *und hieraus folgt das wichtige Resultat*:

Durch einen nichtsingulären Punkt X^0 gehen zwei (reguläre) ebene Krümmungslinien, die in den Tangentialebenen des Hauptzylinders liegen und die Kurve (L_H) berühren; durch einen singulären Punkt geht eine ebene reguläre sowie die Kurve (L_H) als singuläre Krümmungslinie. Die Fläche $[T_\varkappa]$ gehört somit zu den Enneperschen Minimalflächen. Die Krümmungslinien sind die in (12) dargestellten Kurven.

Die *Asymptotenlinien der Fläche sind von der dritten Ordnung.* Aus (14) und (15) leitet man weiterhin den Satz ab:

Sind $[T_\varkappa]$, $[T_{\bar{\varkappa}}]$ irgend zwei der betrachteten Schraubenflächen, bezogen auf ihre Parameter $p, q, \bar{p}, \bar{q}$, *so werden durch die Abbildungen* (bei konstantem a, b):

$$(18)\quad \bar{p} = a(p+b), \quad \bar{q} = a(q+b); \quad \text{oder} \quad \bar{p} = -a(q+b), \quad \bar{q} = -a(p+b)$$

die Flächen isometrisch aufeinander bezogen, wenn:

$$(19)\qquad a^4 = \frac{\varkappa(1-\varkappa)}{\bar{\varkappa}(1-\bar{\varkappa})}$$

gesetzt wird, und dies sind die einzigen Isometrien zwischen beiden Flächen; die willkürliche Konstante b entspricht einer Verschraubung einer Fläche in sich, welche also die Isometrie nicht aufhebt. Es gibt somit vier wesentlich verschiedene Iso-

metrien, da bei gleichzeitiger Vertauschung von p und q, $\varkappa$ und $1-\varkappa$ die Fläche $[T_\varkappa]$ ungeändert bleibt (vgl. Nr. 14 (6)).

17. *Die zweigliedrige projektive Gruppe der Flächen* $[T_\varkappa]$. Die Flächen $[T_\varkappa]$ bilden einen metrischen Spezialfall einer allgemeineren, von *Lie* [10]) aufgestellten Flächenklasse, nämlich der *Flächen 6. Ordnung und Klasse* $[\mathfrak{T}]$, *welche eine zweigliedrige Gruppe automorpher Kollineationen gestatten.* Jede dieser Flächen $[\mathfrak{T}]$ enthält eine irreduzible Rückkehrkurve 3. Ordnung (L_H), die Tangente eines Punktes F_u von (L_H) als dreifache Gerade (f_u) sowie eine ausgezeichnete Ebene $[\varepsilon_u]$, die Schmiegebene von (L_H) in F_u und Tangentialebene der Fläche längs ihrer dreifachen Geraden (f_u); die Tangentenfläche von (L_H) schneidet $[\varepsilon_u]$ (außer in (f_u)) in einem irreduziblen Kegelschnitt (K_a). *Jede Kollineation, welche die Kurve* (K_a) *in den absoluten Kegelschnitt überführt, verwandelt die Fläche* $[\mathfrak{T}]$ *in eine Minimalschraubenfläche* $[T_\varkappa]$, *und umgekehrt. Daher übertragen sich alle zuvor gewonnenen Resultate ohne weiteres auf die Flächen* $[\mathfrak{T}]$, falls man nur alle metrischen Aussagen projektiv faßt; hierauf näher einzugehen ist indes hier nicht der Ort. Dagegen sei die zweigliedrige Kollineationsgruppe behandelt, die sich in kanonischen Koordinaten besonders einfach darstellt.

Die automorphe Kollineation einer Fläche $[\mathfrak{T}]$ muß jedenfalls die Rückkehrkurve (L_H) 3. Ordnung invariant lassen, zugleich aber die Ebene $[\varepsilon_u]$, die Gerade (f_u) sowie den Punkt F_u; sie führt daher auch den Ort der Schmiegstrahlen von (L_H), welche (f_u) treffen, in sich über, also eine *Cayley*sche Regelfläche 3. Ordnung $[\mathfrak{L}]$ (die zu der *Lie*schen Schraubenfläche kollinear ist). Diese gestatten aber nun nach *Lie* [10]) eine *dreigliedrige projektive Gruppe* $\{\mathfrak{G}_3\}$, und in ihr muß die gesuchte zweigliedrige Gruppe $\{\mathfrak{G}_2\}$ der Flächen $[\mathfrak{T}]$ enthalten sein.

Um nun zunächst die Gruppe $\{\mathfrak{G}_3\}$ aufzustellen, wähle man das Koordinatentetraeder als Schmiegtetraeder der Kurve (L_H) so, daß die Gleichungen $\mathfrak{x}_4 = 0$ die Ebene $[\varepsilon_u]$, $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_4 = 0$ die Gerade (f_u), $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_4 = 0$ den Punkt F_u darstellen; alsdann hat die Fläche $[\mathfrak{L}]$ die Gleichung:

$$\mathfrak{x}_1^3 + 3\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4 - 3\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4^2 = 0\,, \tag{20}$$

und für die gesuchten automorphen Kollineationen $\mathfrak{x} \to \bar{\mathfrak{x}}$ dieser Fläche findet man nach einfacher Rechnung die Gleichungen (mit $\varkappa \neq 0$):

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{x}}_1 : \bar{\mathfrak{x}}_2 : \bar{\mathfrak{x}}_3 : \bar{\mathfrak{x}}_4 &= \{\varkappa\mathfrak{x}_1 - \lambda\mathfrak{x}_4\} : \{\varkappa\lambda\mathfrak{x}_1 + \varkappa^2\mathfrak{x}_2 + \mu\mathfrak{x}_4\} \\ &: \{\varkappa\mu\mathfrak{x}_1 - \varkappa^2\lambda\mathfrak{x}_2 + \varkappa^3\mathfrak{x}_3 - (\tfrac{1}{3}\lambda^3 + \lambda\mu)\mathfrak{x}_4\} : \mathfrak{x}_4\,.\end{aligned} \tag{21}$$

Sie lassen sich durchsichtiger schreiben bei Benutzung von Koordinaten, die nur für die nicht in $[\varepsilon_u]$ gelegenen Punkte erklärt werden sollen:

Als kanonische Koordinaten ϱ, σ, τ eines Punktes $\mathfrak{x}$ sollen bezeichnet werden die Parameter:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_4} = -\sigma, \quad \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_4} = -\tfrac{1}{2}(\sigma^2 + \tau), \quad \frac{\mathfrak{x}_3}{\mathfrak{x}_4} = \tfrac{1}{6}\sigma^3 + \tfrac{1}{2}\sigma\tau - \varrho, \quad \text{oder:} \\ &\sigma = -\frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_4}, \quad \tau = -\frac{1}{\mathfrak{x}_4^2}\{\mathfrak{x}_1^2 + 2\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4\}, \; 3\varrho = \frac{1}{\mathfrak{x}_4^3}\{\mathfrak{x}_1^3 + 3\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4 - 3\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4^2\}.\end{aligned} \tag{22}$$

[10]) Vgl. [L. 2] S. 213, 218.

Bei Verwendung dieser Koordinaten gehen die Gleichungen (21) über in:

$$(23)\qquad \boxed{\bar\varrho = \varkappa^3\varrho,\quad \bar\sigma = \varkappa\sigma + \lambda,\quad \bar\tau = \varkappa^2\tau - \lambda^2 - 2\mu}$$

und *stellen die gesuchte dreigliedrige Gruppe* $\{\mathfrak{G}_3\}$ *dar*, mit der Parameterkomposition:

$$(24)\qquad \bar{\bar\varkappa} = \varkappa\bar\varkappa,\quad \bar{\bar\lambda} = \bar\varkappa\lambda + \bar\lambda,\quad \bar{\bar\mu} = \bar\varkappa^2\mu + \bar\mu - \bar\varkappa\lambda\bar\lambda.$$

Bei den Flächen $\{\mathfrak{T}\}$ bleibt nun außerdem die Kurve $(L_H)\,(\varrho = \tau = 0)$ invariant, und daher wird $\lambda^2 + 2\mu = 0$ sein müssen; in der Tat stellen alsdann die Gleichungen:

$$(25)\qquad \boxed{\bar\varrho = \varkappa^3\varrho,\quad \bar\sigma = \varkappa\sigma + \lambda,\quad \bar\tau = \varkappa^2\tau}$$

eine *zweigliedrige kontinuierliche Gruppe* $\{\mathfrak{G}_2\}$ dar [11]). *Diese läßt nun*, wie aus (25) unmittelbar ersichtlich, *die durch den Punkt* $(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$ *gehende Bahnfläche*:

$$(26)\qquad \bar\varrho^2\tau_0^3 - \bar\tau^3\varrho_0^2 = 0$$

invariant, also im Falle $9\varrho_0^2 + \tau_0^3 = 0$ die *Tangentenfläche 4. Ordnung von* (L_H), im Falle $9\varrho_0^2 + \tau_0^3 \neq 0$ dagegen die in Rede stehende *Fläche* $[\mathfrak{T}]$ 6. *Ordnung und Klasse*; diese Flächen sind somit *W*-Flächen der Gruppe $\{\mathfrak{G}_2\}$.

Die Gruppe $\{\mathfrak{G}_2\}$ läßt, wie aus (22), (25) ersichtlich, den Kegelschnitt $(K_a): \mathfrak{X}_4 = 0,\ \mathfrak{X}_2^2 + 2\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_3 = 0$ invariant, und daher lassen sich die Transformationen der Gruppe als *Ähnlichkeiten* (mit (K_a) als absoluten Kegelschnitt) auffassen, und *die in* $\{\mathfrak{G}_2\}$ *enthaltene eingliedrige Untergruppe* $(\varkappa = 1)$ *entspricht dann der Schraubungsgruppe, welche die Flächen* $[T_\varkappa]$ *erzeugt.*

18. *Schraubenflächen und Nullsystem der Schraubungsgruppe.* Ordnet man durch das mit der Gruppe $\{S_i\}$ verbundene Nullsystem dem Punkte $X(\varrho, \sigma, \tau)$ einer Schraubenfläche $[S_i]: \varrho = \varrho(\tau)$ (von den Schraubenzylindern $\tau = \text{const.}$ abgesehen) den Nullpunkt $\bar X$ seiner Tangentialebene zu, so *ist der Fläche* $\{S_i\}$ *eine Schraubenfläche* $[\bar S_i]$ *zugeordnet*, der Ort der Punkte $\bar X$, die in Parametern folgendermaßen dargestellt wird (der Akzent bezeichne die Ableitung nach τ):

$$(27)\qquad \bar v = v - 2\varrho',\quad \bar\tau = -\tau - 4\varrho'^2,\quad \bar\varrho = \varrho + \tfrac{8}{3}\varrho'^3.$$

Hieraus folgt, daß durch diese Transformation der Fläche $[\bar S_i]$ wieder die Fläche $[S_i]$ zugeordnet wird. *Jede Liesche Schraubenfläche* $\varrho = \text{const.}$ *wird somit auf sich selbst bezogen. Dagegen geht eine Fläche* $[T_\varkappa]$ *mit der Gleichung* $9(\varrho - \varrho_0)^2 + (1 - \alpha)\tau^3 = 0,\ \alpha(1-\alpha) \neq 0$ (vgl. Nr. 13 (1)) *über in eine Fläche derselben Art mit der Gleichung* $9(\bar\varrho - \varrho_0)^2 + (1 - \bar\alpha)\bar\tau^3 = 0$, *wo* $\alpha\bar\alpha = 1$ *ist; insbesondere sind daher die Flächen* $[T_\varkappa]$ *mit dem Parameter* $\alpha = -1$ *oder* $2\varkappa = 1 \pm \sqrt{2}$ *gegenüber der Transformation invariant.*

Es gehen somit Minimalflächen wieder in Minimalflächen über, und zwar so, daß Asymptotenlinien wieder Asymptotenlinien entsprechen, während den isotropen Kurven der einen Fläche die Krümmungslinien der homologen Fläche zugeordnet sind.

---

[11]) Vgl. [L. 5] S. 149

Karlsruhe, den 16. April 1925.

Über die linearen Differentialgleichungen, die in bezug auf die lineare gebrochene Transformationsgruppe invariant sind.

Von *D. Grawe* in Kiew.

1. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dz^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \cdots + P_n y = 0, \tag{1}$$

wo die Koeffizienten P_k gegebene Funktionen der vier Punkte z, a, b, c der komplexen Ebene sind

$$P_k = P_k(z, a, b, c).$$

Nach der Transformation

$$z = \frac{Az' + B}{Cz' + D}, \quad \Delta = AD - BC \neq 0 \tag{2}$$

entsteht die Gleichung

$$\frac{d^n y}{dz'^n} + P_1' \frac{d^{n-1} y}{dz'^{n-1}} + \cdots + P_n' y = 0.$$

Wir nennen die Gleichung (1) *invariant* in bezug auf die Transformation (2), wenn die neuen Koeffizienten P_k' ebenso durch die neuen Werte z', a', b', c':

$$a = \frac{Aa' + B}{Ca' + D}, \quad b = \frac{Ab' + B}{Cb' + D}, \quad c = \frac{Ac' + B}{Cc' + D}$$

sich ausdrücken, wie die alten Koeffizienten P_k durch z, a, b, c, d. h.

$$P_k' = P_k(z', a', b', c').$$

Wir werden auch sagen, daß die Gleichung *zur Gruppe G gehört*, falls sie invariant in bezug auf G ist.

2. Wir stellen uns die Aufgabe, alle Gleichungen (1) zu finden, welche zu der *allgemeinen* Gruppe (2) gehören, d. h. wenn alle Koeffizienten A, B, C, D willkürliche reelle oder komplexe Zahlen sind.

Zunächst führen wir einige Bezeichnungen und Grundformeln ein:

$$\frac{dz'}{dz} = \frac{(Cz' + D)^2}{\Delta} = \mathfrak{v}, \quad \frac{C(Cz' + D)}{\Delta} = \mathfrak{w}.$$

Wir haben

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dz'}\,\mathfrak{v}\,, \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d^2y}{dz'^2}\,\mathfrak{v}^2 + \frac{dy}{dz'}\,2\,\mathfrak{v}\mathfrak{w}$$

und allgemein

$$\frac{d^ky}{dz^k} = \sum_{l=0}^{k} N_l^{(k)}\,\frac{d^{k-l}y}{dz'^{k-l}}\,\mathfrak{v}^{k-l}\,\mathfrak{w}^l\,,$$

wobei $N_0^{(k)} = 1$. Eine abermalige Differentiation der letzten Formel gibt für $N_l^{(k)}$ die rekurrenten Beziehungen

$$N_l^{(k+1)} = (2k - l + 1)\,N_{l-1}^{(k)} + N_l^{(k)}\,, \quad N_k^{(k+1)} = (k+1)\,N_{k-1}^{(k)}\,.$$

Die wiederholten Summationen geben den allgemeinen Ausdruck

$$N_l^{(k+1)} = \frac{k\,(k-1)^2\,(k-2)^2 \cdots (k-l+1)^2\,(k-l)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots l}\,,$$

wo die mittleren Faktoren den Exponenten 2 und die extremen den Exponenten 1 haben. Bemerken wir nebenbei noch

$$N_{k-1}^{(k)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$$

$$N_{l-m}^{(n-m)}\,N_{k-l}^{(n-l)} = \begin{bmatrix} k-m \\ l-m \end{bmatrix} N_{k-m}^{(n-m)} \quad (n > k > l > m)\,,$$

wo $\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$ die Binomialkoeffizienten der Entwicklung $(1+x)^\lambda$ sind.

3. Bemerken wir noch folgende Formeln:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial A} = -\frac{D}{\Delta}\,\mathfrak{v}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial B} = \frac{C}{\Delta}\,\mathfrak{v}\,, \quad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial A} = -\frac{D}{\Delta}\,\mathfrak{w}, \quad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial B} = \frac{C}{\Delta}\,\mathfrak{w}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial C} = z\,\mathfrak{v}\,\frac{D}{\Delta} + \frac{Cz'+D}{\Delta}\,z', \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial D} = -\frac{C}{\Delta}\,z\mathfrak{v} + \frac{Cz'+D}{\Delta}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial C}\,C + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial D}\,D = \mathfrak{v}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial C}\,A + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial D}\,B = 2\,z\mathfrak{v}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial C} = -\frac{D}{\Delta} + \frac{2\,AD - CB}{\Delta C}\,\mathfrak{w}, \quad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial D} = \frac{C}{\Delta} - \frac{A}{\Delta}\,\mathfrak{w}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial C}\,C + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial D}\,D = \mathfrak{w}, \quad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial C}\,A + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial D}\,B = 1 + 2z\,\mathfrak{w}$$

$$(4) \quad \frac{1}{z} + \mathfrak{w} = \frac{Cz'+D}{Az'+B} + \frac{C(Cz'+D)}{\Delta} = \frac{(Cz'+D)^2}{\Delta} \cdot \frac{A}{Az'+B} = \mathfrak{v}\,\frac{A}{Az'+B}$$

$$(5) \quad \frac{1}{z-a} + \mathfrak{w} = \frac{(Cz'+D)\,(Ca'+D)}{\Delta(z'-a')} + \frac{C\,(Cz'+D)}{\Delta} = \frac{\mathfrak{v}}{z'-a'}$$

$$(6) \quad \frac{b-a}{(z-a)\,(z-b)} = \frac{b'-a'}{(z'-a')(z'-b')}\,\mathfrak{v}$$

4. Nach (3) bekommen wir für $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

$$(7) \quad \mathfrak{v}^k\,P_k' = \sum_{l=0}^{k} N_{k-l}^{(n-l)}\,P_l\,\mathfrak{w}^{k-l}\,,$$

wo $P_0 = 1$.

Wenn wir beachten, daß

$$P_i = P_i(z, a, b, c) = P^i\left(\frac{Az'+B}{Cz'+D}, \frac{Aa'+B}{Ca'+D}, \frac{Ab'+B}{Cb'+D}, \frac{Ac'+B}{Cc'+D}\right)$$

ist, so müssen wir (7) als eine Identität in bezug auf die Veränderlichen z', a', b', c', A, B, C, D betrachten. Für $k = n$ haben wir

$$\mathfrak{v}^n P'_n = P_n . \tag{8}$$

5. Unsere Methode zur Lösung der Aufgabe besteht darin, daß wir die Identitäten (7), (8) nach A, B, C, D differenzieren und dann aus Kombination der Resultate partielle Differentialgleichungen für die Funktionen P_k erhalten. Diese Differentialgleichungen geben die allgemeinsten Ausdrücke, die die Identitäten (7), (8) befriedigen können. Im allgemeinen Falle, da diese Differentialgleichungen nur notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen sind, braucht man noch eine Ergänzungsuntersuchung, um die erhaltenen Formeln an die Identitäten (7), (8) anzupassen.

6. Wir wollen zunächst die einfachere Identität (8) untersuchen. Die Differentiation nach A und B gibt

$$\sum \frac{\partial P_n}{\partial z}\frac{z}{Cz'+D} = n\,\mathfrak{v}^{n-1} P'_n \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial A}, \quad \sum \frac{\partial P_n}{\partial z}\frac{1}{Cz'+D} = n\,\mathfrak{v}^{n-1} P'_n \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial B}. \tag{9}$$

Hier schreiben wir zur Abkürzung

$$\sum \frac{\partial P_n}{\partial z}\frac{z'}{Cz'+D} = \frac{\partial P_n}{\partial z}\frac{z'}{Cz'+D} + \frac{\partial P_n}{\partial a}\frac{a'}{Ca'+D} + \frac{\partial P_n}{\partial b}\frac{b'}{Cb'+D} + \frac{\partial P_n}{\partial c}\frac{c'}{Cc'+D}.$$

Multiplizieren wir (9) mit A und B und addieren:

$$\sum \frac{\partial P_n}{\partial z} z = -\,n P_n . \tag{10}$$

Die Funktion P_n muß homogen vom Grade $-n$ sein:

$$P_n = \frac{1}{z^n}\,\Omega_n(u, v, w), \tag{11}$$

wo Ω_n eine willkürliche Funktion der drei Argumenten

$$u = \frac{z}{a}, \quad v = \frac{z}{b}, \quad w = \frac{z}{c} \quad \text{ist.}$$

Differenzieren wir (8) nach C und D:

$$-\sum \frac{\partial P_n}{\partial z}\, z\,\frac{z'}{Cz'+D} = n\,\mathfrak{v}^{n-1} P'_n \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial C}, \quad -\sum \frac{\partial P_n}{\partial z}\, z\,\frac{1}{Cz'+D} = n\,\mathfrak{v}^{n-1} P'_n \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial D}.$$

Multiplikation mit A und B und Addition gibt

$$\sum \frac{\partial P_n}{\partial z} z^2 = -\,2nz P_n . \tag{12}$$

Substituiert man (11) in die partielle Differentialgleichung (12), so entsteht die Gleichung

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial u}(u-1) + \frac{\partial \Omega_n}{\partial v}(v-1) + \frac{\partial \Omega_n}{\partial w}(w-1) = -\,n\,\Omega_n .$$

Ihr allgemeines Integral ist

$$\Omega_n = \frac{1}{(u-1)^n}\, \Pi_n(\alpha, \beta),$$

wo Π_n eine willkürliche Funktion der zwei Argumente

$$\alpha = \frac{u-1}{v-1} = \frac{z-a}{z-b}\cdot\frac{b}{a}, \qquad \beta = \frac{u-1}{w-1} = \frac{z-a}{z-c}\cdot\frac{c}{a}$$

ist.

$$P_n = \left[\frac{a}{z(z-a)}\right]^n \Pi_n(\alpha, \beta). \tag{14}$$

7. Man muß jetzt den Ausdruck (14) in die Identität (8) substituieren:

$$\mathfrak{v}^n \left[\frac{a'}{z'(z'-a')}\right]^n \Pi_n\left(\frac{z'-a'}{z'-b'}\frac{b'}{a'}, \frac{z'-a'}{z'-c'}\frac{c'}{a'}\right)$$
$$= \left[\frac{a}{z(z-a)}\right]^n \Pi_n\left(\frac{z-a}{z-b}\frac{b}{a}, \frac{z-a}{z-c}\frac{c}{a}\right),$$

aber

$$\frac{a}{z(z-a)} = \mathfrak{v}\,\frac{Aa'+B}{(Az'+B)(z'-a')}$$

$$\frac{z-a}{z-b}\cdot\frac{b}{a} = \frac{z'-a'}{z'-b'}\frac{Ab'+B}{Aa'+B}, \quad \frac{z-a}{z-c}\frac{c}{a} = \frac{z'-a'}{z'-c'}\frac{Ac'+B}{Aa'+B}.$$

Bezeichnen wir $\frac{B}{A} = \varrho$ und lassen wir die Striche der Buchstaben weg, so erhalten wir die Identität

$$\left[\frac{a+\varrho}{z+\varrho}\right]^n \Pi_n\left(\frac{z-a}{z-b}\frac{b+\varrho}{a+\varrho}, \frac{z-a}{z-c}\frac{c+\varrho}{a+\varrho}\right) = \left[\frac{a}{z}\right]^n \Pi_n\left(\frac{z-a}{z-b}\frac{b}{a}, \frac{z-a}{z-c}\cdot\frac{c}{a}\right).$$

Differenzieren wir diese Identität nach ϱ und setzen nachher $\varrho = 0$, so erhalten wir

$$\frac{\partial \Pi_n}{\partial a}\frac{(a-b)z}{(z-b)a} + \frac{\partial \Pi_n}{\partial \beta}\frac{(a-c)z}{(z-c)a} = -n\,\Pi_n$$

oder

$$\frac{\partial \Pi_n}{\partial a}(a-1) + \frac{\partial \Pi_n}{\partial \beta}(\beta-1) = n\,\Pi_n.$$

Die Integration gibt

$$\Pi_n = (a-1)^n\, \Psi_n(\gamma), \tag{15}$$

wo $\Psi_n(\gamma)$ eine willkürliche Funktion eines Argumentes

$$\gamma = \frac{\beta-1}{a-1} = \frac{z-b}{z-c}\frac{c-a}{b-a}$$

ist. Ψ_n enthält die Veränderlichen z, a, b, c nur in der Verbindung γ, sonst aber nicht.

Die Größe γ als Doppelverhältnis von vier Punkten ist invariant, d. h.

$$\frac{z-c}{z-b}\frac{b-a}{c-a} = \frac{z'-c'}{z'-b'}\frac{b'-a'}{c'-a'}.$$

Aus (14) und (15) erhalten wir endgültig

$$P_n = \left[\frac{b-a}{(z-a)(z-b)}\right]^n \Psi_n(\gamma). \tag{16}$$

Die Formel (6) zeigt, daß der Ausdruck (16) wirklich der Identität (8) genügt und die damit erhaltene Funktion P_n zur gesuchten Lösung der Aufgabe gehört.

7. Viel schwieriger ist die Untersuchung der Identitäten (7) für die anderen Koeffizienten P_k. Wir wollen in analoger Weise verfahren. Schreiben wir die Identität (7) folgendermaßen:

$$P_k = \mathfrak{v}^k P_k' - \sum_{l=0}^{k-1} N_{k-l}^{(n-l)} P_l \mathfrak{w}^{k-l}. \tag{17}$$

Differenzieren wir nach A:

$$\sum \frac{\partial P_k}{\partial z}\frac{z'}{Cz'+B} = -\frac{D}{\Delta}\left[k\mathfrak{v}^{k-1}P_k - \sum_{l=0}^{k-1} N_{k-l}^{(n-l)}(k-l)P_l\mathfrak{w}^{k-l}\right] - \sum_{l=0}^{k-1} N_{k-l}^{(n-l)}\mathfrak{w}^{k-l}\sum\frac{\partial P_l}{\partial z}\frac{z'}{Cz'+D}.$$

Durch Differenzieren nach B und Kombination erhalten wir

$$\sum \frac{\partial P_k}{\partial z} z = -\left[k\mathfrak{v}^k P_k' - \sum_{l=0}^{k-1}(k-l)N_{k-l}^{(n-l)}P_l\mathfrak{w}^{k-l}\right] - \sum_{l=0}^{k-1} N_{k-l}^{(n-l)}\mathfrak{w}^{k-l}\sum\frac{\partial P_l}{\partial z}z. \tag{18}$$

Es ist möglich nachzuweisen, daß für alle Werte von l

$$\sum \frac{\partial P_l}{\partial z} z = -lP_l \tag{19}$$

ist. Zu diesem Ende genügt es vorauszusetzen, daß die Gleichung (19) für alle l kleiner als k richtig sei, dann gibt die Gleichung (18)

$$\sum \frac{\partial P_k}{\partial z} z = -k\left[\mathfrak{v}^k P_k' - \sum_{l=0}^{k-1} N_{k-l}^{(n-l)} P_l \mathfrak{w}^{k-l}\right] = -kP_k.$$

Die Richtigkeit von (19) für den Fall $k=1$ erhellt unmittelbar aus (18). Auf diese Weise ist die Gleichung (19) für alle Werte $l = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ bewiesen.

8. Wir wollen jetzt die Gleichungen für P_k herstellen, die der Gleichung (12) analog sind. Differenzieren wir die Identität (17) nach C und D:

$$-\sum\frac{\partial P_k}{\partial z}z\frac{z'}{Cz'+D} = k\mathfrak{v}^{k-1}P_k'\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial C} - \sum_{l=0}^{k-1}(k-l)N_{k-l}^{(n-l)}P_l\mathfrak{w}^{k-l-1}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial C} + \sum_{l=0}^{k-1}N_{k-l}^{(n-l)}\mathfrak{w}^{k-l}\sum\frac{\partial P_l}{\partial z}z\frac{z'}{Cz'+D}$$

$$-\sum\frac{\partial P_k}{\partial z}z\frac{1}{Cz'+D} = \ldots\ldots\ldots$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit A und B und addieren:

$$(20)\quad -\sum \frac{\partial P_k}{\partial z} z^2 = 2kz\mathfrak{v}^k P_k' - \sum_{l=0}^{k-1} (k-l) N_{k-l}^{(n-l)} P_l \mathfrak{w}^{k-l-1} (1 + 2z\mathfrak{w}) + \sum_{l=0}^{k-1} N_{k-l}^{(n-l)} \mathfrak{w}^{k-l} \sum \frac{\partial P_l}{\partial z} z^2 .$$

Der Fall $k = 1$ gibt

$$-\sum \frac{\partial P_1}{\partial z} z^2 = 2z\mathfrak{v} P_1' - N_1^{(n)}(1 + 2z\mathfrak{w})$$
$$= 2z(\mathfrak{v} P_1' - N_1^{(n)}\mathfrak{w}) - N_1^{(n)} = 2zP_1 - N_1^{(n)}$$

oder

$$\sum \frac{\partial P_1}{\partial z} z^2 = N_1^{(n)} - 2zP_1 .$$

Der Fall $k = 2$ gibt nach allen Rechnungen

$$\sum \frac{\partial P_2}{\partial z} z^2 = P_1 N_1^{(n-1)} - 4zP_2 .$$

Daraus kann man eine Hypothese für den allgemeinen Fall machen

$$(21)\qquad \sum \frac{\partial P_l}{\partial z} z^2 = N_1^{(n-l+1)} P_{l-1} - 2lzP_l .$$

Und wirklich führt nach (20) diese Hypothese, falls sie für $l = 1, 2, \ldots, k-1$ richtig ist, zur Richtigkeit der Formel (21) für $l = k$. Wir haben nämlich

$$-\sum \frac{\partial P_k}{\partial z} z^2 = 2kz\mathfrak{v}^k P_k' - \sum_{l=0}^{k-1} (k-l) N_{k-l}^{(n-l)} P_l \mathfrak{w}^{k-l-1} (1 + 2z\mathfrak{w})$$
$$+ \sum_{l=0}^{k-1} N_{k-l}^{(n-l)} \mathfrak{w}^{k-l} (N_1^{(n-l+1)} P_{l-1} - 2lzP_l)$$
$$= 2kzP_k + 2kz \sum_{l=0}^{k-1} N_{k-l}^{(n-l)} P_l \mathfrak{w}^{k-l} - 2z \sum_{l=0}^{k-1} (k-l) N_{k-l}^{(n-l)} P_l \mathfrak{w}^{k-l}$$
$$- 2z \sum_{l=0}^{k-1} l N_{k-l}^{(n-l)} P_l \mathfrak{w}^{k-l}$$
$$- \sum_{l=0}^{k-1} (k-l) N_{k-l}^{(n-l)} P_l \mathfrak{w}^{k-l-1} + \sum_{l=0}^{k-1} N_{k-l}^{(n-l)} N_1^{(n-l+1)} P_{l-1} \mathfrak{w}^{k-l},$$

aber

$$N_{k-l}^{(n-l)} N_1^{(n-l+1)} = (k-l+1) N_{k-l+1}^{(n-l+1)} .$$

Wir erhalten die Gleichung (21) für $l = k$.

9. Wir haben also ein System partieller Differentialgleichungen

$$(22)\quad \sum \frac{\partial P_k}{\partial z} z = -kP_k, \quad \sum \frac{\partial P_k}{\partial z} z^2 = N_1^{(n-k+1)} P_{k-1} - 2kzP_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Die Integration der linken Gleichungen gibt

$$P_k = \frac{1}{z^k} \Omega_k(u, v, w), \quad \Omega_0 = 1 .$$

Die rechten Gleichungen können in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$(28)\quad \frac{\partial \Omega_k}{\partial u}(u-1)+\frac{\partial \Omega_k}{\partial v}(v-1)+\frac{\partial \Omega_k}{\partial w}(w-1)=N_1^{(n-k+1)}\Omega_{k-1}-k\Omega_k$$

$$\frac{du}{u-1}=\frac{dv}{v-1}=\frac{dw}{w-1}=\frac{d\Omega_k}{N_1^{(n-k+1)}\Omega_{k-1}-k\Omega_k}.$$

Nun bekommen wir solche Gleichungen:

$$(24)\qquad \frac{d\Omega_k}{du}+\frac{k}{u-1}\Omega_k-N_1^{(n-k+1)}\frac{\Omega_{k-1}}{u-1}=0$$

zur rekurrenten Auswertung der Funktionen Ω_k.

Wir haben im Falle $k=1$

$$\frac{d\Omega_1}{du}+\frac{\Omega_1}{u-1}-N_1^{(n)}\frac{1}{u-1}=0.$$

Die Integration gibt

$$\Omega_1=\frac{1}{u-1}\left[\Pi_1+N_1^{(n)}(u-1)\right]$$

wo Π_1 eine willkürliche Funktion der zwei Argumenten α, β (s. § 5) ist.

Im Falle $k=2$:

$$\Omega_2=\frac{1}{(u-1)^2}\left[\Pi_2+\Pi_1 N_1^{(n-1)}(u-1)+N_2^{(n)}(u-1)^2\right].$$

Man kann die allgemeine Hypothese machen

$$(25)\qquad \Omega_k=\sum_{l=0}^{k}\frac{N_{k-l}^{(n-l)}}{(u-1)^l}\Pi_l.$$

Die Integration der Gleichung (24) gibt bei der Hypothese, daß die Formel (25) für $k-1$ richtig ist,

$$\Omega_k=\frac{1}{(u-1)^k}\left[\Pi_k+N_1^{(n-k+1)}\int_1^u\sum_{l=0}^{k-1}N_{k-l-1}^{(n-l)}(u-1)^{k-l-1}\Pi_l\,du\right]$$

$$=\frac{1}{(u-1)^k}\left[\Pi^k+\sum_{l=0}^{k-1}\int_1^u(k-l)(u-1)^{k-l-1}N_{k-l}^{(n-l)}\Pi_l\,du\right]$$

$$=\sum_{l=0}^{k}\frac{N_{k-l}^{(n-l)}\Pi_l}{(u-1)^l},$$

w. z. b. w.

10. Wir müssen jetzt die Ergänzungsuntersuchung unternehmen, damit die erhaltene Formel

$$P_l=\frac{1}{z^l}\sum_{m=0}^{l}\frac{N_{l-m}^{(n-m)}\Pi_m}{(u-1)^m}$$

der Identität (7) genügt:

$$\mathfrak{v}^k P_k'=\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{z^l}\sum_{m=0}^{l}\frac{N_{k-l}^{(n-l)}N_{l-m}^{(n-m)}}{(u-1)^m}\Pi_m\,\mathfrak{w}^{k-l}=\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{z^l}\sum_{m=0}^{l}\frac{N_{k-m}^{(n-m)}\begin{bmatrix}k-m\\ l-m\end{bmatrix}\Pi_m}{(u-1)^m}\,\mathfrak{w}^{k-l}$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{\Pi_m N_{k-m}^{(n-m)}}{[z(u-1)]^m} \sum_{l=m}^{k} \frac{\begin{bmatrix} k-m \\ l-m \end{bmatrix}}{z^{l-m}} \mathfrak{w}^{k-m-(l-m)} = \sum_{m=0}^{k} \frac{\Pi_m N_{k-m}^{(n-m)}}{[z(u-1)]^m} \left(\frac{1}{z} + \mathfrak{w}\right)^{k-m},$$

ferner

$$\frac{1}{z(u-1)} = \frac{a}{z(z-a)} = \mathfrak{v} \frac{a' + \varrho}{(z' + \varrho)(z' - a')}.$$

Nach (4) bekommen wir

$$\mathfrak{v}^k P_k' = \mathfrak{v}^k \sum_{m=0}^{k} \frac{(a' + \varrho)^m}{(z' + \varrho)^k} \cdot \frac{N_{k-m}^{(n-m)}}{(z' - a')^m} \Pi_m$$

und endlich

$$P_k' = \sum_{m=0}^{k} \frac{(a' + \varrho)^m}{(z' + \varrho)^k} \cdot \frac{N_{k-m}^{(n-m)}}{(z' - a')^m} \Pi_m \left(\frac{z' - a'}{z' - b'} \frac{b' + \varrho}{a' + \varrho}, \quad \frac{z' - a'}{z' - c'} \frac{c' + \varrho}{a' + \varrho}\right).$$

Die Differentiation dieser Identität nach ϱ und die Substitution $\varrho = 0$ gibt, indem man die Striche der Buchstaben wegläßt,

$$(26) \qquad 0 = \sum_{m=0}^{k} \frac{zm - ka}{a} \left[\frac{a}{z-a}\right]^m N_{k-m}^{(n-m)} \Pi_m$$
$$+ \sum_{m=0}^{k} \left[\frac{a}{z-a}\right]^{m-1} N_{k-m}^{(n-m)} \left[\frac{\partial \Pi_m}{\partial \alpha}(1-\alpha) + \frac{\partial \Pi_m}{\partial \beta}(1-\beta)\right].$$

Man muß jetzt die letzte Identität allgemein befriedigen.

Wir haben für $k = 1$

$$(27) \qquad \frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha}(\alpha - 1) + \frac{\partial \Pi_1}{\partial \beta}(\beta - 1) = \Pi_1 - N_1^{(n)},$$

für $k = 2$

$$(28) \qquad \frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha}(\alpha - 1) + \frac{\partial \Pi_2}{\partial \beta}(\beta - 1) = 2\Pi_2 - N_1^{(n-1)} \Pi_1,$$

Wir machen die allgemeine Hypothese

$$(29) \quad \frac{\partial \Pi_m}{\partial \alpha}(\alpha - 1) + \frac{\partial \Pi_m}{\partial \beta}(\beta - 1) = m\Pi_m - N_1^{(n-m+1)} \Pi_{m-1},$$

welche wirklich richtig ist, weil sie die Gleichung (26) in die Identität

$$0 = \sum_{m=0}^{k} \frac{zm - ka}{a} \left[\frac{a}{z-a}\right]^m N_{k-m}^{(n-m)} \Pi_m$$
$$+ \sum_{m=1}^{k} \left[\frac{a}{z-a}\right]^{m-1} N_{k-m}^{(n-m)} \left[N_1^{(n-m+1)} \Pi_{m-1} - m\Pi_m\right]$$

verwandelt.

11. Wir müssen jetzt die Gleichungen (27), (28), (29) der Reihe nach integrieren.

Die Gleichung (27) gibt

$$\Pi_1 = N_1^{(n)} + (\alpha - 1) \Psi_1(\gamma),$$

wo Ψ_1 eine willkürliche Funktion ist. Substituieren wir diesen Ausdruck in (28) und integrieren:

$$\Pi_2 = N_2^{(n)} + N_1^{(n-1)}(a-1)\,\Psi_1(\gamma) + (a-1)^2\,\Psi_2(\gamma).$$

Nun machen wir die allgemeine Hypothese

$$\Pi_m = \sum_{r=0}^{m} N_{m-r}^{(n-r)}(a-1)^r\,\Psi_r(\gamma), \quad \Psi_0 = 1 \tag{30}$$

und bemerken, daß diese Hypothese wirklich die richtige ist, weil sie die Gleichung (29) befriedigt. In der Tat, substituieren wir (30) in (29), so bekommen wir (γ konstant) die Identität

$$\sum_{r=0}^{m} N_{m-r}^{(n-r)}\, r\,(a-1)^r\,\Psi_r$$

$$= \sum_{r=0}^{m} N_{m-r}^{(n-r)}\, m(a-1)^r\,\Psi_r - N_1^{(n-m+1)} \sum_{r=0}^{n-1} N_{m-r-1}^{(n-r)}\,(a-1)^r\,\Psi_r\,.$$

Es ist jetzt möglich, den allgemeinen Ausdruck für P_k zu erhalten:

$$P_k = \frac{1}{z^k} \sum_{l=0}^{k} \frac{N_{k-l}^{(n-l)}}{(u-1)^l} \sum_{r=0}^{l} N_{l-r}^{(n-r)}(a-1)^r\,\Psi_r(\gamma)$$

$$= \frac{1}{z^k} \sum_{r=0}^{k} \Psi_r(\gamma)\,(a-1)^r \sum_{l=r}^{k} \frac{N_{k-l}^{(n-l)}\,N_{l-r}^{(n-r)}}{(u-1)^l}$$

$$= \left[\frac{1}{z\,(u-1)}\right]^k \sum_{r=0}^{k} \Psi_r(\gamma)\,(a-1)^r\,N_{k-r}^{(n-r)} \sum_{l=r}^{k} \begin{bmatrix} k-r \\ l-r \end{bmatrix} (u-1)^{k-l}$$

$$= \left[\frac{u}{z(u-1)}\right]^k \sum_{r=0}^{k} \Psi_r(\gamma) \left[\frac{a-1}{u}\right]^r N_{k-r}^{n-r} = \frac{1}{(z-a)^k} \sum_{r=0}^{k} \Psi_r(\gamma) \left(\frac{b-a}{z-b}\right)^r N_{k-r}^{(n-r)},$$

und die Aufgabe ist vollständig gelöst.

12. Unsere Methode bestand darin, daß wir die Identitäten

$$W(\varrho) = W(0) + \varrho W'(0) + \frac{\varrho^2}{1\cdot 2} W''(0) + \cdots = 0$$

befriedigt haben, indem wir zwei erste Entwicklungskoeffizienten $W(0)$, $W'(0)$ gleich Null machten. Dann waren alle anderen Koeffizienten auch Null, darum brauchte man nur zu probieren, ob wirklich die erhaltenen Formeln die initialen Identitäten befriedigen. Am Schluß des § 5 haben wir diese Probe für P_n gemacht. Wir müssen jetzt dasselbe für die anderen P_k durchführen.

Wir müssen auf der rechten Seite von (7) haben

$$\sum_{l=0}^{k} N_{k-l}^{(n-l)} \frac{1}{(z-a)^l} \sum_{r=0}^{l} \Psi_r(\gamma) \left(\frac{b-a}{z-b}\right)^r N_{l-r}^{(n-r)}\, \mathfrak{w}^{k-l}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \Psi_r(\gamma) \left(\frac{b-a}{z-b}\right)^r \sum_{l=r}^{k} \frac{N_{k-l}^{(n-l)}\,N_{l-r}^{(n-r)}}{(z-a)^l}\, \mathfrak{w}^{k-l}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \Psi_r(\gamma) \left[\frac{b-a}{(z-a)\,(z-b)}\right]^r N_{k-r}^{(n-r)} \sum_{l=r}^{k} \begin{bmatrix} k-r \\ l-r \end{bmatrix} \frac{\mathfrak{w}^{k-r-(l-r)}}{(z-a)^{l-r}}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \Psi_r(\gamma) \left[\frac{b-a}{(z-a)(z-b)}\right]^r N_{k-r}^{(n-r)} \left(\frac{1}{z-a} + \mathfrak{w}\right)^{k-r}$$

$$= \mathfrak{v}^k \frac{1}{(z'-a')^k} \sum_{r=0}^{k} \Psi_r(\gamma) \left(\frac{b'-a'}{z'-b'}\right)^r N_{k-r}^{(n-r)} = \mathfrak{v}^k P_k' ,$$

w. z. b. w.

13. Wir haben die Aufgabe für die volle kontinuierliche lineare Gruppe (2) gelöst. Es liegt nahe, speziellere Untergruppen zu untersuchen. Augenblicklich kann ich nur die Lösung der Aufgabe für die Untergruppe $B = 0$, die den Nullpunkt invariant läßt, geben. Die Lösung dieser letzten Aufgabe geben schon die Formeln

$$P_k = \frac{1}{z^k} \sum_{l=0}^{k} \frac{N_{k-l}^{(n-l)} \Pi_l(\alpha, \beta)\, a^l}{(z-a)^l} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$$

$$P_n = \left[\frac{a}{z(z-a)}\right]^n \Pi_n(\alpha, \beta) .$$

In diesem Falle läßt die Transformation

$$z = \frac{A z'}{C z' + D}$$

die Argumente α, β invariant.

Man muß jetzt sich überzeugen, daß die letzten Formeln wirklich die Identitäten (7) befriedigen. In der Tat, gibt die rechte Seite von (7)

$$\sum_{l=0}^{k} N_{k-l}^{(n-l)} \frac{\mathfrak{w}^{k-l}}{z^l} \sum_{m=0}^{l} \frac{N_{l-m}^{(n-m)} \Pi_m}{(u-1)^m}$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{\Pi_m}{[z(u-1)]^m} \sum_{l=m}^{k} \frac{N_{k-l}^{(n-l)} N_{l-m}^{(n-m)}}{z^{l-m}}\, \mathfrak{w}^{k-l}$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{\Pi_m N_{k-m}^{(n-m)}}{[z(u-1)]^m} \sum_{l-m}^{k} \begin{bmatrix} k-m \\ l-m \end{bmatrix} \frac{1}{z^{l-m}}\, \mathfrak{w}^{k-m-(l-m)}$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{\Pi_m N_{k-m}^{(n-m)}}{[z(u-1)]^m} \left(\frac{1}{z} + \mathfrak{w}\right)^{k-m} .$$

Aber wenn $B = 0$ ist, so

$$\Delta = AD$$

$$\frac{1}{z} + \mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{v}}{z'}, \quad \frac{1}{z(u-1)} = \mathfrak{v} \frac{a'}{z'(z'-a')}, \tag{31}$$

und wir bekommen

$$\mathfrak{v}^k \frac{1}{z'^k} \sum_{m=0}^{k} \frac{\Pi_m N_{k-m}^{(n-m)} a'^m}{(z'-a')^m} = \mathfrak{v}^k P_k' ,$$

w. z. b. w.

Nach (31) sieht man sofort, daß P_n die Identität (8) befriedigt.

14. *Satz I. Die allgemeinste Form der Gleichung*

$$\frac{d^n y}{dz^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \cdots + P_n y = 0, \tag{1}$$

welche zur Gruppe

$$z = \frac{Az' + B}{Cz' + D}$$

gehört, ist folgende

$$P_k = \frac{1}{(z-a)^k} \sum_{r=0}^{k} \Psi_r(\gamma) \binom{b-a}{z-b}^r N_{k-r}^{(n-r)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$P_n = \left[\frac{b-a}{(z-a)(z-b)}\right]^n \Psi_n(\gamma),$$

wo $\Psi_0 = 1$,

$$N_k^{(n)} = \frac{n!\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!\,(n-k-1)!}$$

und die Ψ_r *willkürliche Funktionen von*

$$\gamma = \frac{z-b}{z-c}\,\frac{c-a}{b-a}$$

sind, welche die unabhängigen Veränderlichen z, a, b, c nur in der Verbindung γ *enthalten.*

Satz II. Die Gleichungen (1), *welche zur Gruppe* $B = 0$ *gehören, die den Nullpunkt invariant läßt, haben folgende Form*

$$P_k = \frac{1}{z^k} \sum_{l=0}^{k} \frac{N_{k-l}^{(n-l)} a^l \Pi_l(\alpha, \beta)}{(z-a)^l} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$P_n = \left[\frac{a}{z(z-a)}\right]^n \Pi_n(\alpha, \beta)$$

wo $\Pi_0 = 1$ *und die* Π_l *willkürliche Funktionen von*

$$\alpha = \frac{z-a}{z-b}\,\frac{b}{a}, \qquad \beta = \frac{z-a}{z-c}\,\frac{c}{a}$$

sind.

15. Machen wir Anwendung auf den Fall der Gleichung zweiter Ordnung ($n = 2$):

$$P_1 = \frac{1}{z-a} \sum_{r=0}^{1} \Psi_r(\gamma) \left(\frac{b-a}{z-a}\right)^r N_{1-r}^{(2-r)}$$

$$= \frac{2}{z-a} + \frac{b-a}{(z-a)(z-b)} \Psi_1\left(\frac{z-b}{z-c}\,\frac{c-a}{b-a}\right).$$

Nehmen wir drei Koeffizienten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, die der Bedingung

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{M} + \mathfrak{N} = 2$$

genügen, und geben der Funktion Ψ_1 die Form

$$\Psi_1(\gamma) = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}\gamma,$$

so bekommen wir

$$P_1 = \frac{\mathfrak{L}}{z-a} + \frac{\mathfrak{M}}{z-b} + \frac{\mathfrak{N}}{z-c}.$$

Machen wir für den Koeffizient P_2 in der Formel

$$P_2 = \left[\frac{b-a}{(z-a)(z-b)}\right]^2 \Psi_2(\gamma)$$

die Annahme

$$\Psi_2(\gamma) = L\gamma + M(1-\gamma) - N\gamma(1-\gamma),$$

so bekommen wir

$$P_2 = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\left[\frac{L(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{M(b-a)(b-c)}{z-b} + \frac{N(c-a)(c-b)}{z-c}\right].$$

Wir erhalten die *Riemann-Paperiz*sche Gleichung.

Kiew, 16. März 1926.

Kurvenklassen $f(\varkappa, \tau) = 0$ mit vorgegebenen Eigenschaften.

Von *Hans Böhmel* in Genthin.

Einleitung.

Jede Raumkurve kann als bestimmt gedacht werden bis auf ihre Lage im Raum, wenn Krümmung $\varkappa$ und Torsion τ als Funktionen der Bogenlänge gegeben sind. Es besteht also auch für jede Raumkurve eine Beziehung $f(\varkappa, \tau) = 0$, die durch Elimination der Bogenlänge gefunden werden kann (vorausgesetzt, daß diese ausführbar ist). Im allgemeinen werden alle einer solchen Kurvenklasse $f(\varkappa, \tau) = 0$ angehörenden Raumkurven durch irgendeine gemeinsame Eigenschaft (oder auch mehrere) verbunden sein; und diese gemeinsame Eigenschaft ist es zumeist, die umgekehrt zur Aufstellung gerade dieser Kurvenklasse als Bedingungsgleichung geführt hat.

Allgemein wird eine vorgegebene Eigenschaft einer Klasse von Raumkurven sich nicht gerade durch eine Beziehung $f(\varkappa, \tau) = 0$ ausdrücken lassen, sondern es werden noch Bogenelement und Ableitungen der Krümmungen nach dem Bogenelement auftreten.

Was die geschlossene Betrachtung der Kurvenklassen in der Form $f(\varkappa, \tau) = 0$ rechtfertigt, ist weniger die formale Übereinstimmung, vielmehr eine gemeinsame, von der Gleichung $f(\varkappa, \tau) = 0$ abhängende Eigenschaft; das ist das Verhalten der Hauptnormalenfläche, das weiterhin genauer aufgezeigt werden soll.

Dieses Verhalten der Hauptnormalenfläche wird noch dadurch besonders anschaulich, daß die charakteristischen Eigenschaften aus einer die Regelfläche der Hauptnormalen repräsentierenden ebenen „Bildkurve“ hervorgehen, die sich, wie auch immer die Beziehung $f(\varkappa, \tau) = 0$ lauten mag, herstellen läßt.

Diese Darstellung gestattet es nun umgekehrt, zu vorgegebenen Eigenschaften allgemeinere Beziehungen $f(\varkappa, \tau) = 0$ aufzustellen, die algebraisch vom beliebigen Grade oder auch transzendent sind, während bisher algebraische Beziehungen über den zweiten Grad hinaus selten bekannt geworden sind (vgl. *Klaucke*: Über Raumkurven, zwischen deren beiden Krümmungen eine Beziehung besteht. Diss. Halle 1916). Damit sind solche Beziehungen in starkem Maße der bisherigen Isolierung und auch der Zufälligkeit enthoben. Außerdem bietet diese Methode ein heuristisches Mittel, um zu einer beliebig vorgegebenen Klasse $f(\varkappa, \tau) = 0$ gemeinsame, verbindende Eigenschaften aufzusuchen.

Hierzu soll ein von *Mannheim* angegebenes Verfahren ausgestaltet werden. In einer größeren Abhandlung: Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une novelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces [1]) stellt *Mannheim* die Theorie der Strahlensysteme geometrisch dar, indem er von sog. Elementarflächen, die aus einem Strahl und einem jeden der unendlich benachbarten Strahlen bestehen, ausgeht. Speziell betrachtet er dann die von den Normalen einer Fläche längs einer Leitkurve gebildete Regelfläche(normalie), und unter diesen wieder besonders die Hauptnormalenflächen von Raumkurven. In einigen Noten in den Comptes rendus [2]) wendet er die gewonnenen Beziehungen auf die *Bertrand*schen Kurven und die Kurven der Klasse $A(\varkappa^2 + \tau^2) = \varkappa$ an (wo $\varkappa$ und τ wie gewöhnlich die beiden Krümmungen einer Raumkurve bezeichnen sollen). Der Anwendungsbereich der *Mannheim*schen Methode ist auf allgemeine quadratische Beziehungen zwischen den beiden Krümmungen erweitert worden [3]). Hier soll nun die Anwendung der *Mannheim*schen Methode auf eine noch weitere Basis gestellt werden. Doch zuvor soll kurz die Hilfsgerade (droite auxiliaire) *Mannheim*s eingeführt werden.

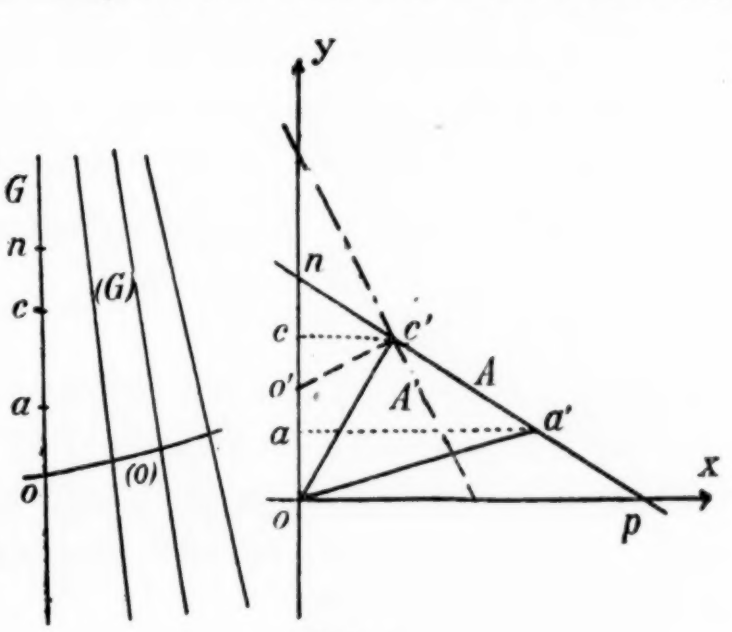
Auf der Erzeugenden G einer Regelfläche wird ein beliebiger Punkt o als Ausgangspunkt gewählt, die Tangentialebene in diesem Punkte an die Regelfläche als Ausgangsebene. Da jedem Punkt der Erzeugenden eindeutig eine Tangentialebene zugeordnet ist (und umgekehrt), so kann jede Tangentialebene durch den Winkel, den sie mit der Ausgangsebene bildet, als bestimmt gedacht werden. Da dem Ausgangspunkt o der Winkel Null entspricht, so läßt sich diese Beziehung ausdrücken durch:

(1) $\quad y \operatorname{tg} Y + \lambda y + \mu \operatorname{tg} Y = 0,$

wo y die Entfernung des Berührungspunktes von o, Y der Winkel der beiden Tangentialebenen, λ und μ Konstante sind. Für $\frac{y}{\operatorname{tg} Y} = x$ geht die Gleichung über in:

(2) $\quad y + \lambda x + \mu = 0,$

d. h. in die Gleichung einer Geraden, wenn man die Erzeugende G als die Y-Achse, den Punkt o als Koordinatenanfang eines rechtwinkligen Systems wählt. Diese Gerade A ist die *Mannheim*sche Hilfsgerade. Ist $o\,a$ die Ordinate eines Punktes a' auf A, so ist $o\,a = a\,a' \operatorname{tg}(x, o, a')$, d. h. der Winkel $(x\,o\,a')$ ist der Winkel Y. Die Tangentialebene in n steht senkrecht zu der in o und die Tangentialebene in c senkrecht



Figur 1.

[1]) *Liouville*, Journal de Mathématique, 2e serie, t. XVII (1872), p. 109 ff.

[2]) Comptes Rendus hebdomaires, t. 85 (1877); t. 86 (1878).

[3]) *Böhmel*, Untersuchungen zu den Kurven der Klassen $A\varkappa^2 + C\tau^2 = \varkappa$ und $A\varkappa^2 + C\tau^2 = \tau$ Diss. Jena 1920 (nicht im Druck erschienen).

zu der des unendlich fernen Punktes von G, wenn oc die Ordinate des Lotfußpunktes c' von o auf A ist. Der Punkt c ist der Zentralpunkt; cc' der Verteilungsparameter. Wählt man einen Punkt o' als neuen Ausgangspunkt auf G, so werden c und c' entsprechend ihrer Bedeutung fest bleiben, die entsprechende Hilfsgerade A' wird also die Senkrechte auf $o'c'$ im Punkte c' sein.

Beschreibt o auf der Regelfläche (G) eine Kurve (o), so erhält man, wenn stets die Y-Achse mit der entsprechenden Erzeugenden zusammenfällt, wenn also das Koordinatensystem festgehalten wird, eine Schar von Hilfsgeraden, die eine Kurve — die courbe représentative — umhüllen. Der Punkt c beschreibt dabei die Striktionslinie.

Ist die Kurve (o) orthogonale Trajektorie der Erzeugenden, so geben die Achsenabschnitte op und on den geodätischen Torsionsradius und den geodätischen Krümmungsradius.

Ist (o) Asymptotenlinie von (G), dann wird (G) zur Hauptnormalenfläche von (o); on wird zum Krümmungsradius und op zum Torsionsradius von (o). Der Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Hilfsgeraden stellt dann einen Punkt auf (G) dar, für den die Hauptkrümmungsradien der Fläche entgegengesetzt gleich werden [1]).

§ 1. Kurvenklasse und Hilfskurve.

Die Bildkurve ist gegeben als Umhüllungsgebilde von Geraden mit den Achsenabschnitten r_g und ϱ_g, dem geodätischen Torsionsradius und dem geodätischen Krümmungsradius der Kurve (o), die Orthogonaltrajektorie der Regelfläche (G) ist, bzw. mit den Achsenabschnitten r und ϱ, dem Torsionsradius und dem Krümmungsradius der Kurve (o), die Asymptotenlinie der Fläche (G) ist. Die Hilfsgeraden haben also die Linienkoordinaten $u = -\frac{1}{r_g} = -\tau_g$; $v = -\frac{1}{\varrho_g} = -\varkappa_g$ bzw. $u = -\frac{1}{r} = -\tau$; $v = -\frac{1}{\varrho} = -\varkappa$. Besteht also zwischen den beiden geodätischen Krümmungen der Orthogonaltrajektorie einer Regelfläche eine Beziehung n-ter Ordnung, so wird die Bildkurve eine Kurve n-ter Klasse sein.

Und besteht zwischen den beiden Krümmungen einer Raumkurve eine Beziehung n-ter Ordnung, so wird die Bildkurve ihrer Hauptnormalenfläche eine Kurve n-ter Klasse sein.

Ebenso wird man für transzendente Beziehungen zwischen den beiden (bzw. geodätischen) Krümmungen eine transzendente Beziehung zwischen den Linienkoordinaten der Bildkurve bekommen.

Speziell wird eine Beziehung 2. Ordnung zwischen den beiden (bzw. geodätischen) Krümmungen einen Kegelschnitt als Bildkurve haben [2]).

---

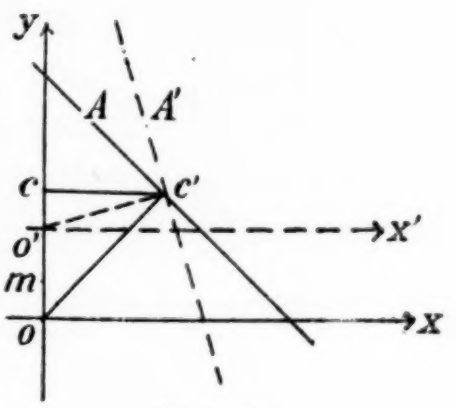
[1]) *Mannheim*, Nouveau mode de représentation plane de classes de surfaces réglées. Comptes rendus, t. 85 (1877), p. 790.

[2]) Vgl. Diss. *Böhmel*, wo der Beweis anders geführt ist.

Die *Cesaro*schen Kurven, die auch dadurch definiert sind, daß eine mit ihrem Dreikant festverbundene Gerade eine abwickelbare Fläche beschreibt, und die durch die Beziehung:

$$A\varkappa^2 + B\varkappa\tau + C\tau^2 = P\varkappa + Q\tau$$

dargestellt werden, haben als Bildkurve ihrer Hauptnormalenfläche stets eine Parabel [1]). Spezielle Lagen der Parabel, die speziellen Klassen von *Cesaro*schen Kurven entsprechen, gestatten dann leicht, Beziehungen zwischen Kurvenpunkt, Krümmungsmittelpunkt, Striktionslinie der Hauptnormalenfläche und den Punkten aufzustellen, für die die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat. Doch soll später der umgekehrte und allgemeinere Weg eingeschlagen werden, nach vorgegebenen Eigenschaften die zugehörigen Kurvenklassen zu bestimmen. Vorher sollen einige allgemeine Zusammenhänge zwischen den Orthogonaltrajektorien einer Regelfläche hergeleitet werden.



Figur 2.

Es sei A eine Hilfsgerade, bezogen auf einen Punkt o einer Erzeugenden G einer Regelfläche (G). Soll die dem Ausgangspunkt o' entsprechende Hilfsgerade A' ermittelt werden, so ist, wie gesagt, die Senkrechte zu $o'c'$ in c' zu ziehen, wenn c der Zentralpunkt von G und cc' der Verteilungsparameter ist. Es ist dann die neue Hilfsgerade A' auf das Koordinatensystem $x'y'(o')$ zu beziehen. Rechnerisch gestaltet sich dies folgendermaßen. Es sei die Gleichung von A:

$$A\colon\ ux + vy + 1 = 0$$
$$oc'\colon\ vx - uy = 0$$
$$c'\colon\ x_c = -\frac{u}{u^2+v^2};\quad y_c = -\frac{v}{u^2+v^2}$$
$$o'c'\colon\ y = \frac{1}{u}\,[m(u^2+v^2)+v]x + m$$
$$A'\colon\ y\,[m(u^2+v^2)+v] + ux + 1 + mv = 0,$$

oder da $y = y' + m;\ x = x'$,

$$A'\colon\ y'\,[m(u^2+v^2)+v] + x'u + [m^2(u^2+v^2) + 2mv + 1] = 0.$$

Die Gerade A' hat also die Linienkoordinaten:

$$(1)\qquad U = \frac{u}{m^2(u^2+v^2)+2mv+1};\quad V = \frac{m(u^2+v^2)+v}{m^2(u^2+v^2)+2mv+1}.$$

Umgekehrt drücken sich die Größen u, v durch U, V folgendermaßen aus:

$$(2)\qquad u = \frac{U}{(1-mV)^2 + m^2U^2};\quad v = \frac{V(1-mV) - mU^2}{(1-mV)^2 + m^2U^2}.$$

Ist nun m für die gesamte Bildkurve konstant gewählt und ist außerdem die Ausgangskurve (o) Orthogonaltrajektorie der Regelfläche, so wird auch die

[1]) Siehe S. 178, Anm. 2.

in konstantem Abstand m von ihr entfernt liegende Kurve (o') es sein. In diesem Falle bedeuten aber die Größen U und V die negativ genommenen geodätischen Krümmungen (Torsion und Krümmung) der Kurve (o') auf der Regelfläche. Auf Grund der Formeln (2) wird aber jede Beziehung n-ter Ordnung zwischen u und v in eine solche $2n$-ter Ordnung in U und V übergehen. Das heißt also:

Besteht zwischen den geodätischen Krümmungen der Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden einer Regelfläche eine Beziehung n-ter Ordnung, so besteht zwischen den geodätischen Krümmungen sämtlicher Orthogonaltrajektorien dieser Regelfläche eine Beziehung von (höchstens) $2n$-ter Ordnung.

Und besteht zwischen den Krümmungen einer Raumkurve eine Beziehung n-ter Ordnung, so besteht zwischen den geodätischen Krümmungen der Orthogonaltrajektorien ihrer Hauptnormalenfläche eine Beziehung von (höchstens) $2n$-ter Ordnung.

Diese Sätze lassen sich auch leicht analytisch nachweisen.

Es mögen anschließend an die Formeln (1) und (2) einige spezielle, Neues bringende Fälle behandelt werden.

Soll $U = \text{konst.} = -\frac{1}{C}$ sein, so gilt für die Ausgangskurve:

$$m^2(u^2 + v^2) + 2mv + 1 = -Cu, \text{ d. h.:}$$

Besteht zwischen den geodätischen Krümmungen einer Orthogonaltrajektorie einer Regelfläche die Beziehung:

$$m^2\left(\frac{1}{r_g^2} + \frac{1}{\varrho_g^2}\right) + 1 = \frac{2m}{\varrho_g} + \frac{C}{r_g},$$

so liegt auf der Regelfläche im konstanten Abstand m eine Orthogonaltrajektorie mit konstanter geodätischer Torsion $\frac{1}{C}$.

Und besteht zwischen den Krümmungen einer Raumkurve eine Beziehung:

$$m^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}\right) + 1 = \frac{2m}{\varrho} + \frac{C}{r},$$

so liegt auf ihrer Hauptnormalenfläche im konstanten Abstand m eine Kurve konstanter geodätischer Torsion $\frac{1}{C}$.

Wird $V = \text{konst.} = -\frac{1}{C}$ gewählt, so wird:

$$m^2(u^2 + v^2) + 2mv + 1 = -C[m(u^2 + v^2) + v], \text{ d. h.:}$$

Besteht zwischen den beiden geodätischen Krümmungen einer Orthogonaltrajektorie einer Regelfläche die Beziehung:

$$m(m + C)\left(\frac{1}{r_g^2} + \frac{1}{\varrho_g^2}\right) + 1 = (2m + C)\frac{1}{\varrho_g},$$

so liegt auf der Regelfläche in konstantem Abstand m eine Kurve konstanter geodätischer Krümmung $\frac{1}{C}$.

$\frac{U}{V} = \text{konst.} = \frac{1}{C}$ ergibt: $Cu = m(u^2 + v^2) + v$, d. h.:

Besteht zwischen den beiden geodätischen Krümmungen einer Orthogonaltrajektorie einer Regelfläche die Beziehung:

$$m\left(\frac{1}{r_g^2} + \frac{1}{\varrho_g^2}\right) = \frac{C}{r_g} + \frac{1}{\varrho_g},$$

so liegt auf der Regelfläche in konstantem Abstand m eine Kurve, für die $\frac{\varrho_g}{r_g} = \text{konst.} = \frac{1}{C}$ ist.

Und besteht zwischen den beiden Krümmungen einer Raumkurve eine Beziehung:

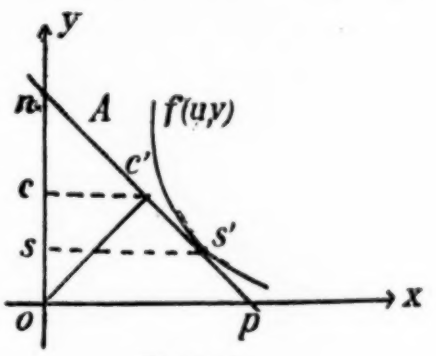
$$m\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}\right) = \frac{C}{r} + \frac{1}{\varrho},$$

so liegt im konstanten Abstand m auf der Hauptnormalenfläche eine Kurve, für die das Verhältnis der geodätischen Krümmungen konstant (gleich C) ist.

Es sei bemerkt, daß auch eine Reihe bekannter Beziehungen sich aus den Formeln (1) und (2) leicht herleiten lassen.

§ 2. Kurvenklassen mit vorgegebenen Eigenschaften [1].

Für die folgenden Betrachtungen mag stets die Regelfläche als Hauptnormalenfläche der Ausgangskurve vorausgesetzt werden, da nur in diesem Falle dem Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Hilfsgeraden ein Punkt auf der Erzeugenden der Hauptnormalenfläche entspricht, für den diese entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat. Alle anderen Beziehungen, die von dieser letztgenannten frei sind, lassen sich unmittelbar auf den Fall, daß die Ausgangskurve nur Orthogonaltrajektorie der Regelfläche ist, übertragen. An die Stelle der Krümmungen treten dann die geodätischen Krümmungen.



Figur 3.

Denkt man sich die Bildkurve $f(u, v) = 0$ in Linienkoordinaten gegeben, so sind die Achsenabschnitte $op = -\frac{1}{u}$; $on = -\frac{1}{v}$; es ist der Abstand der Striktionslinie $oc = -\frac{v}{u^2 + v^2}$. Es bleibt noch zu berechnen die Ordinate os des Punktes s', des Schnittpunktes zweier benachbarter Tangenten der Bildkurve. Der Schnittpunkt zweier konsekutiver Tangenten ist $(u_1, v_1;\ u_2, v_2)$:

[1]) Vgl. *Takasu*, Characteristic properties of Space Curves, whose Curvatures and Torsions are connected by a general Relation. The science Reports of the Tôhoku Imperial University, 1. Series, Vol. XII, p. 181 ff., wo umgekehrt zu vorgegebenen Kurvenklassen gewisse Größen berechnet werden, und zwar in einer formalen Einteilung der Kurvenklassen mit linearen und quadratischen Beziehungen.

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{oder} \quad (u - u_2)\,\frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2} - v + v_2 = 0.$$

Läßt man nun u_2, v_2 gegen u_1, v_1 gehen, so lautet die Schnittpunktsgleichung: $u\left(\frac{dv}{du}\right)_1 - v + v_1 - u_1\left(\frac{dv}{du}\right)_1 = 0$, d. h. die gesuchte Strecke os ist:

$$os = -\frac{1}{v - u\,\frac{dv}{du}},$$

wenn die Indizes wieder weggelassen werden.

Drücken wir die gewonnenen Ausdrücke durch die beiden Krümmungen $\varkappa$ und τ aus, so wird also:

$$on = \frac{1}{\varkappa}; \quad oc = \frac{\varkappa}{\varkappa^2 + \tau^2}; \quad os = \frac{1}{\varkappa - \tau\,\frac{d\varkappa}{d\tau}}.$$

Irgendwelche Beziehungen zwischen den Punkten der Leitkurve, dem Krümmungsmittelpunkt, den Punkten der Striktionslinie und den Punkten, für die die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat, werden also eine Funktion $f\left(\varkappa, \tau, \frac{d\varkappa}{d\tau}\right) = 0$ ergeben, der integriert eine Funktion $g(\varkappa, \tau, C) = 0$ entspricht, wo C die Integrationskonstante bedeutet. Jeder vorgegebenen Beziehung entspricht also eine Kurvenklasse bzw. eine Schar von Kurvenklassen.

Im folgenden sollen einige besonders einfache Fälle behandelt werden.

1. Der Krümmungsmittelpunkt sei m-mal soweit vom Kurvenpunkt entfernt, wie der Punkt, für den die Hauptnormalfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat, d. h.

$$on = m \cdot os \text{ (s. Fig. 3, S. 181)}$$

$$\frac{1}{\varkappa} = m\,\frac{1}{\varkappa - \tau\,\frac{d\varkappa}{d\tau}}, \quad \text{oder} \quad (m-1)\,\frac{d\tau}{\tau} + \frac{d\varkappa}{\varkappa} = 0.$$

Das gibt integriert $\tau^{m-1}\,\varkappa = C$ als Beziehung zwischen den beiden Krümmungen der Leitkurve, wo C die Integrationskonstante ist.

Hier wie in den meisten der folgenden Beispiele ergeben spezielle Werte von m speziellere Klassen, unter denen die Sonderklassen der *Cesaro*schen Kurven z. T. schon bekannt sind [1]), während die Fälle höherer Ordnung wohl durchweg neu sind. Der Raumersparnis halber wird auf die Darbietung dieser Sonderfälle verzichtet, zumal der Leser sie sich ohne Mühe selbst ableiten kann.

Bestimmt man diejenigen Kurven dieser Klassen $\tau^{m-1}\,\varkappa = C$, die zugleich

[1]) Vgl. Diss. *Böhmel*.

Geodätische auf einer Kegelfläche sind, für die also $\frac{\varkappa}{\tau} = \frac{l}{s}$ ist, so wird

$$\varrho = \frac{s^{\frac{m-1}{m}}}{C^{\frac{1}{m}} l^{\frac{m-1}{m}}}$$

Für $\frac{m-1}{m} = n$ sind dadurch die Kurven $\varrho = k s^n$ (*Cesaro*: Vorlesungen über natürliche Geometrie, Leipzig, S. 15, 16) dargestellt. Verbiegt man diese Kurven so, daß die Krümmung nicht geändert wird und daß sie in Raumkurven der Klassen $\tau^{m-1}\varkappa = C$ übergehen, so sind sie zugleich Kegelgeodätische.

Für $m = \frac{1}{2}$ wird $n = -1$, man erhält die Klothoide, die also zu einer Kurve der Klasse $\varkappa^2 = C^2\tau$ verbogen werden muß, damit sie Kegelgeodätische wird; für $m = 2$, $n = \frac{1}{2}$ erhält man die Kreisevolvente und $\varkappa\tau = C$ als die zugehörige Kurvenklasse.

2. Der Abstand der Striktionslinie der Hauptnormalenfläche vom Kurvenpunkt sei das m-fache des Abstandes desjenigen Punktes, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat.

$$oc = m \cdot os \text{ (s. Fig. 3, S. 181), oder } \frac{\varkappa}{\varkappa^2 + \tau^2} = \frac{m}{\varkappa - \tau \frac{d\varkappa}{d\tau}}$$

$$\frac{d(\varkappa^2)}{d\tau} + 2(m-1)\frac{\varkappa^2}{\tau} + 2m\tau = 0,$$

eine lineare Differentialgleichung in $\varkappa^2$, τ. Diese ergibt integriert:

$$\tau^{2m-2}(\varkappa^2 + \tau^2) = C.$$

3. Der Abstand des Krümmungsmittelpunktes sei das m-fache des Abstandes der Striktionslinie der Hauptnormalenfläche, d. h. $\frac{1}{\varkappa} = m\frac{\varkappa}{\varkappa^2 + \tau^2}$

$$on = m \cdot oc, \quad \text{d. h.} \quad (m-1)\varkappa^2 = \tau^2, \quad \text{oder} \quad \frac{\varkappa}{\tau} = \sqrt{\frac{1}{m-1}},$$

d. h. Schraubenlinien.

4. Die Striktionslinie teile die Strecke zwischen Krümmungsmittelpunkt und dem Punkt, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat, im Verhältnis $m : 1$; also

$$cn = m \cdot sc \text{ (s. Fig. 3, S. 181) } \frac{1}{\varkappa} - \frac{\varkappa}{\varkappa^2 + \tau^2} = m\left(\frac{\varkappa}{\varkappa^2 + \tau^2} - \frac{1}{\varkappa - \tau\frac{d\varkappa}{d\tau}}\right);$$

das gibt:

$$\frac{d\varkappa}{d\tau}\left(m\frac{\varkappa}{\tau} - \frac{\tau}{\varkappa}\right) + m + 1 = 0,$$

oder für $\frac{\varkappa}{\tau} = x$:

$$dx\,\frac{mx^2-1}{mx(x^2+1)}+\frac{d\tau}{\tau}=0.$$

Dies ergibt integriert:

$$\tau^{2m}(x^2+1)^{m+1}=Cx^2;\quad \text{d. h.}\quad (\varkappa^2+\tau^2)^{m+1}=C\varkappa^2.$$

5. Ein Punkt mit dem konstanten Abstand a von der Grundkurve liege so auf der Hauptnormalen, daß er die Strecke zwischen Krümmungsmittelpunkt und Striktionslinie der Hauptnormalenfläche im Verhältnis $m:1$ teilt; also $an=m\cdot ca$ oder:

$$\frac{1}{\varkappa}-a=m\left(a-\frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2}\right);\quad \text{d. h.}\quad a(m+1)\,\varkappa(\varkappa^2+\tau^2)=(m+1)\,\varkappa^2+\tau^2.$$

6. Der um die konstante Strecke a von der Grundkurve auf der Hauptnormalen liegende Punkt a teile die Strecke zwischen Krümmungsmittelpunkt und dem Punkt im Verhältnis $m:1$, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat. Also:

$$an=m\cdot sa,\quad \text{oder}\quad \frac{1}{\varkappa}-a=m\left(a-\frac{1}{\varkappa-\tau\dfrac{d\varkappa}{d\tau}}\right),\quad \text{oder:}$$

$$\frac{a\varkappa(m+1)-1}{(m+1)\,\varkappa(1-a\varkappa)}\,d\varkappa+\frac{d\tau}{\tau}=0.$$

Dies ergibt integriert:

$$C\tau^{m+1}=\varkappa(1-a\varkappa)^m.$$

7. Ein Punkt mit dem konstanten Abstand a von der Grundkurve teile den Abschnitt Striktionslinie der Hauptnormalenfläche-Grundkurve im Verhältnis $m:1$; also

$$ca=m\cdot ao,\quad \text{oder}\quad \frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2}-a=ma,\quad \text{d. h.}\quad (m+1)a(\varkappa^2+\tau^2)=\varkappa,$$

eine spezielle *Cesaro*sche Kurvenklasse.

8. Es sollen der Krümmungsmittelpunkt und der Punkt, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat, einerseits, der Punkt mit dem konstanten Abstand a von Grundkurve und der Kurvenpunkt selbst vier Punkte gleichen Doppelverhältnisses m bilden; also $(nsao)=m$ oder:

$$\frac{na}{sa}=\frac{no}{so}$$

$$(m-1)\cdot os\cdot on-am\cdot on+a\cdot os=0$$

$$(m-1)\,\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{1}{\varkappa-\tau\dfrac{d\varkappa}{d\tau}}-\frac{am}{\varkappa}+\frac{a}{\varkappa-\tau\dfrac{d\varkappa}{d\tau}}=0$$

$$(m-1)\,\frac{d\tau}{\tau}-ma\,\frac{d\varkappa}{a\varkappa-1}=0.$$

Dies ergibt integriert:

$$\tau^{m-1}=C(a\varkappa-1)^m.$$

Das Doppelverhältnis wird ein harmonisches für $C\tau^2 = a\varkappa - 1$.

9. Krümmungsmittelpunkt und Striktionslinie der Hauptnormalenfläche; derjenige Punkt, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat und Kurvenpunkt sollen vier Punkte gleichen Doppelverhältnisses m bilden, d. h. $(nsco) = m$ oder:

$$os \cdot [(m-1) \cdot on + oc] = m \cdot on \cdot oc\,.$$

Das ergibt die Differentialgleichung:

$$m\varkappa\left(\varkappa - \tau\frac{d\varkappa}{d\tau}\right) = m\varkappa^2 + (m-1)\tau^2,$$

oder für $\frac{\varkappa}{\tau} = y$:

$$\frac{m y\, dy}{my^2 + m - 1} + \frac{d\tau}{\tau} = 0\,.$$

Die Integration ergibt:

$$\tau^2[my^2 + m - 1] = C, \quad \text{d. h.} \quad m\varkappa^2 + (m-1)\tau^2 = C,$$

das heißt eine Beziehung, der als Bildkurve ein Mittelpunktskegelschnitt entspricht.

Für die Kurven der Klassen $\varkappa^2 + 2\tau^2 + C = 0$ ist dies Verhältnis ein harmonisches.

10. Es sollen Krümmungsmittelpunkt, Punkt mit konstantem Abstand a auf der Hauptnormalen, Striktionslinie der Hauptnormalenfläche und Kurvenpunkt vier Punkte gleichen Doppelverhältnisses m bilden, das heißt: $(ncao) = m$,

$$on \cdot oc \cdot (m-1) - a \cdot m \cdot on + a \cdot oc = 0$$

$$\frac{m-1}{\varkappa^2 + \tau^2} - \frac{am}{\varkappa} + \frac{a\varkappa}{\varkappa^2 + \tau^2} = 0.$$

Dies ergibt $am\tau^2 + (m-1)(a\varkappa - 1)\varkappa = 0$, eine spezielle *Cesaro*sche Klasse.

Das Doppelverhältnis wird ein harmonisches für die Klasse:

$$a\tau^2 + 2\varkappa(a\varkappa - 1) = 0\,.$$

11. Zwei Punkte mit dem festen Abstand a und b von der Grundkurve auf der Hauptnormalen, der Krümmungsmittelpunkt und der Punkt, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat, sollen ein konstantes Doppelverhältnis m bilden; d. h. $(nasb) = m$ oder eingesetzt:

$$os \cdot [(1-m) \cdot on + mb - a] = on \cdot (b - ma) + ab(m-1)\,.$$

Dies ergibt die Differentialgleichung:

$$[ab(m-1)\varkappa + b - ma]\tau\frac{d\varkappa}{d\tau} = (m-1)(a\varkappa - 1)(b\varkappa - 1)$$

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{m-1}\left\{\frac{am}{a\varkappa - 1} - \frac{b}{b\varkappa - 1}\right\} d\varkappa.$$

Dies ergibt integriert:

$$\tau^{m-1}(b\varkappa - 1) = C(a\varkappa - 1)^m\,.$$

12. Zwei feste Punkte mit konstantem Abstand a und b von der Grundkurve sollen mit Krümmungsmittelpunkt und Striktionslinie der Hauptnormalenfläche ein konstantes Doppelverhältnis m bilden, d. h. $(ncab) = m$.

$$on \cdot oc(m-1) + oc \cdot (am - b) + on \cdot (b - ma) + ab(m-1) = 0.$$

Das gibt die Beziehung dritter Ordnung:

$$ab(m-1)\varkappa(\varkappa^2+\tau^2) + (b-ma)(\varkappa^2+\tau^2) + (a-mb)\varkappa^2 + (m-1)\varkappa = 0.$$

13. Es sei das Produkt der Abstände des Krümmungsmittelpunktes und der Striktionslinie der Hauptnormalenfläche von der Grundkurve konstant.

$$on \cdot oc = m; \qquad \frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2} \cdot \frac{1}{\varkappa} = m; \qquad m(\varkappa^2+\tau^2) = 1.$$

Es ist dieselbe Kurvenklasse, die unter 2. als Spezialfall abgeleitet werden kann.

14. Es sei das Produkt des Abstandes Krümmungsmittelpunkt von Striktionslinie der Hauptnormalenfläche in den Abstand Striktionslinie von Grundkurve konstant; d. h. $cn \cdot oc = m$

$$\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2}\right)\frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2} = m; \qquad \tau^2 = m(\varkappa^2+\tau^2)^2$$

$\sqrt{m}(\varkappa^2+\tau^2) = \tau$, eine spezielle *Cesaro*sche Kurvenklasse.

15. Es sei das Produkt der Abstände des Krümmungsmittelpunktes und des Punktes, für den die Fläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat, von der Grundkurve konstant, d. h. $on \cdot os = m$.

$$\frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\varkappa - \tau\dfrac{d\varkappa}{d\tau}} = m; \quad m\frac{k}{\tau}\left(\frac{\tau\dfrac{d\varkappa}{d\tau} - \varkappa}{\tau^2}\right) + \frac{1}{\tau^3} = 0.$$

Das ergibt integriert:

$$m\varkappa^2 - C\tau^2 = 1.$$

16. Es sei das Produkt der Abstände der Striktionslinie und desjenigen Punktes, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat, von der Grundkurve konstant; also:

$$oc \cdot os = m; \quad \frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2} - m\left(\varkappa - \tau\frac{d\varkappa}{d\tau}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\tau^3}\frac{\dfrac{\varkappa}{\tau}}{\dfrac{\varkappa^2}{\tau^2}+1} + m\frac{\tau\dfrac{d\varkappa}{d\tau} - \varkappa}{\tau^2} = 0.$$

Das ergibt integriert:

$$\tau^2 ln\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)^2 + m\varkappa^2 + C\tau^2 = 1,$$

also eine transzendente Beziehung.

Auch für solche transzendenten Beziehungen zwischen den beiden Krümmungen einer Raumkurve (bzw. zwischen den beiden geodätischen Krümmungen

der Orthogonaltrajektorie einer Regelfläche) läßt sich sofort die Beziehung zwischen den beiden geodätischen Krümmungen aller Orthogonaltrajektorien der Hauptnormalenfläche (bzw. der vorliegenden Regelfläche) angeben, auf Grund der Formeln (2), S. 179.

17. Das Produkt des Abstandes des Krümmungsmittelpunktes von dem Punkte, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat, in den Abstand des letzteren Punktes von der Grundkurve sei konstant; also $sn \cdot os = m$.

$$\left(\frac{1}{\varkappa - \tau \frac{d\varkappa}{d\tau}}\right)^2 - \frac{1}{\varkappa}\frac{1}{\varkappa - \tau \frac{d\varkappa}{d\tau}} + m = 0; \qquad \frac{1}{\varkappa - \tau \frac{d\varkappa}{d\tau}} = \frac{1}{2\varkappa}\left\{1 \pm \sqrt{1 - 4m\varkappa^2}\right\}$$

$$\frac{\varkappa d\varkappa}{\varkappa^2} \cdot \frac{\pm\sqrt{1-4m\varkappa^2}+1}{\pm\sqrt{1-4m\varkappa^2}-1} = \frac{d\tau}{\tau}.$$

Das ergibt integriert:

$$ln\,\tau - ln\,(\sqrt{1-4m\varkappa^2} \pm 1) + \frac{1}{\pm\sqrt{1-4m\varkappa^2}-1} + C = 0.$$

18. Es sei $\overline{nc} \cdot \overline{os} = m$.

$$\frac{1}{\varkappa} - \frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2} = m\left(\varkappa - \tau\frac{d\varkappa}{d\tau}\right)$$

$$\frac{1}{\tau^3}\frac{1}{\frac{\varkappa}{\tau}\left(1+\frac{\varkappa^2}{\tau^2}\right)} + m\frac{d\frac{\varkappa}{\tau}}{d\tau} = 0.$$

Dies ergibt integriert:

$$m\varkappa^4 - C\tau^4 + 2m\varkappa^2\tau^2 - 2\tau^2 = 0.$$

19. Es sei $\overline{on}^2 = \overline{oc}^2 + \overline{os}^2$.

$$\frac{1}{\varkappa^2} - \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2+\tau^2} = \frac{1}{\left(\varkappa - \tau\frac{d\varkappa}{d\tau}\right)^2}; \qquad \tau\frac{d\frac{\varkappa}{\tau}}{d\tau} + \frac{\frac{\varkappa}{\tau}\left(1+\frac{\varkappa^2}{\tau^2}\right)}{\sqrt{2\frac{\varkappa^2}{\tau^2}+1}} = 0.$$

Das ergibt integriert:

$$ln\,\tau + \frac{1}{2}\,ln\,\frac{\sqrt{\tau^2+2\varkappa^2}-\tau}{\sqrt{\tau^2+2\varkappa^2}+\tau} + \text{arc tg}\,\tau\sqrt{\tau^2+2\varkappa^2} = C,$$

oder:

$$ln\,\frac{\tau\,(\sqrt{\tau^2+2\varkappa^2}-\tau)}{\varkappa\sqrt{2}} + \text{arc tg}\,\tau\sqrt{\tau^2+2\varkappa^2} = C.$$

20. Es sei $\overline{oc} \cdot \overline{os} = \overline{on}^2$.

$$\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\varkappa^2+\tau^2}{\varkappa} = \frac{1}{\varkappa - \tau\frac{d\varkappa}{d\tau}}; \qquad \left(1+\frac{\varkappa^2}{\tau^2}\right)\frac{d\frac{\varkappa}{\tau}}{\frac{\varkappa^3}{\tau^3}} + \frac{d\tau}{\tau} = 0.$$

Dies ergibt integriert:

$$ln\,(C\varkappa) = \frac{1}{2}\,\frac{\tau^2}{\varkappa^2}, \quad \text{oder} \quad \varkappa^2\,ln\,(C\varkappa^2) = \tau^2.$$

Hiermit soll die Aufstellung von Kurvenklassen mit vorgegebenen Eigenschaften, die natürlich beliebig fortgesetzt werden kann, beendet werden. Es soll noch bemerkt werden, daß aus der *Mannheim*schen Bildkurve sofort die Zahl der Singularitäten, für die gleichzeitig $\frac{1}{\varrho} = \infty$ und $\frac{1}{r} = \infty$ sind, abgelesen werden kann; es ist die Anzahl der reellen Tangenten, die vom Koordinatenanfang aus an die *Mannheim*sche Bildkurve gezogen werden können. Diese Singularitäten können Spitzen oder asymptotische Punkte (wie bei der Schraubenlinie des Rotationskegels) sein. Es werden also die *Bertrand*schen Kurven stets eine reelle Singularität aufweisen, die *Cesaro*schen Kurven zwei Singularitäten, die auch imaginär sein können. Bei der Bestimmung der Anzahl ist zu beachten, daß die Kurve selbst periodisch sein kann in dem Sinne, daß die beiden Krümmungen periodisch wiederkehren. Die verschiedenen Zweige der Kurve selbst können noch verschoben und gespiegelt sein.

Da Beispiele für Raumkurven, zwischen deren beiden Krümmungen eine algebraische Beziehung besteht, noch sehr vereinzelt sind, sei zum Schluß noch ein geometrisch einfaches Beispiel für eine Raumkurve gegeben, zwischen deren beiden Krümmungen eine Beziehung 6. Grades besteht. Es sei ein gerader Kreiskegel gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= u \cos \Theta \cos t \\ y &= u \cos \Theta \sin t \\ z &= u \sin \Theta, \end{aligned}$$

wo u die Länge auf der Mantellinie gemessen von der Spitze aus bedeutet, Θ der Winkel der Mantellinien gegen die XY-Ebene, t der Winkel, der an einem beliebigen Schnittkreis gemessen werden mag. Es sollen dann die Kurven auf dem Kegel bestimmt werden, deren Bogenlänge proportional zu t ist (d. h. proportional zur Bogenlänge eines beliebigen Kreises oder gleich der Bogenlänge eines bestimmten Kreises, wobei die Zuordnung punktweise durch die Mantellinien des Kegels erfolgt). Es soll also $\frac{ds}{dt} = a$ sein. Nun ergibt sich

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = u^2 \cos^2 \Theta + \left(\frac{du}{dt}\right)^2.$$

Dies gibt eine Differentialgleichung für u: $\frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2 \cos^2 \Theta}} = \pm\, dt$, deren Lösung lautet:

$$u = \frac{a}{\cos \Theta} \sin\,(\pm \cos \Theta t + \text{konst.}).$$

Wegen der Periodizität des Sinus kann man also schreiben:

$$u = \frac{a}{\cos \Theta} \sin\,(\cos \Theta\, t).$$

Die Gleichungen der gesuchten Kurven sind also:

$$x = a \cos t \sin (\cos \Theta t)$$
$$y = a \sin t \sin (\cos \Theta t)$$
$$z = a \operatorname{tg} \Theta \sin (\cos \Theta t).$$

Die Kurven sind algebraisch, wenn $\cos \Theta = \frac{g_1}{g_2}$ ist, wo g_1 und g_2 ganze Zahlen seien. Setzt man $\frac{t}{g_2} = T$, so wird:

$$x = a \cos (g_2 T) \sin (g_1 T)$$
$$y = a \sin (g_2 T) \sin (g_1 T)$$
$$z = a \operatorname{tg} \Theta \sin (g_1 T).$$

Es ist nun:

$$\cos n \varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi \pm \cdots$$

$$\sin n \varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi \pm \cdots.$$

Sind g_1 und g_2 ungerade, so ist y ein Ausdruck $(g_1 + g_2)$-ten Grades in $\sin T$, z ein Ausdruck g_1-ten Grades in $\sin T$. Sind g_1 ungerade und g_2 gerade, so ist x ein Ausdruck $(g_1 + g_2)$-ten Grades in $\sin T$, z ein Ausdruck g_1-ten Grades in $\sin T$. Ist g_1 gerade und g_2 ungerade, so setzt man $\sin (g_1 T) = \cos (g_1 T + c)$. Es kommt dann nur auf eine Drehung der ganzen Figur hinaus, wenn dafür $\cos (g_1 T)$ gesetzt wird. Es ist dann y ein Ausdruck $(g_1 + g_2)$-ten Grades in $\sin T$, z ein Ausdruck g_1-ten Grades in $\sin T$.

In allen Fällen läßt sich also die vorliegende Kurve darstellen als Schnitt des Rotationskegels mit einem Zylinder vom $g_1 (g_1 + g_2)$-ten Grade; sie ist also selbst vom Grade $2 g_1 (g_1 + g_2)$, also für $\cos \Theta = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ vom Grade $6, 8, 10 \ldots$

Die Kurven gestatten eine sehr einfache geometrische Erzeugung. Wird der Kegelmantel in die Ebene abgewickelt, so stellt die Gleichung

$$u = \frac{a}{\cos \Theta} \sin (\cos \Theta t)$$

die Gleichung der abgewickelten Kurve in Polarkoordinaten dar. Denkt man sich den Kegel durch einen Kreis mit dem Radius a abgeschnitten, so ist $2a\pi$ die Länge des Sektorbogens, $l = \frac{a}{\cos \Theta}$ sein Radius; der Winkel des Sektors ist also $2\pi \cos \Theta$. Durchläuft die Raumkurve die Werte $0 \ldots t \ldots 2\pi$, so durchläuft die entsprechende abgewickelte Kurve $0 \ldots t \cos \Theta \ldots 2\pi \cos \Theta$. Es ist also $u = l \sin \varphi$ die Gleichung der abgewickelten Kurve in Polarkoordinaten. Das ist aber die Gleichung eines Kreises mit dem Radius $\frac{l}{2}$. Entsprechend der Begrenzung des Sektors wird die abgewickelte Kurve in verschiedene Kreisbogen-

stücke zerfallen. Wird $\sin\varphi$ negativ, so geht die Raumkurve auf den Scheitelkegel über.

Ist $\cos\Theta = \frac{1}{n}$, wo n eine ganze Zahl sei, so ist $2a\pi = 2l\cos\Theta\pi = \frac{2l\pi}{n}$, das heißt $\frac{n}{2}$-mal wird der abgewickelte Sektor durchschritten, bis die Stücke des

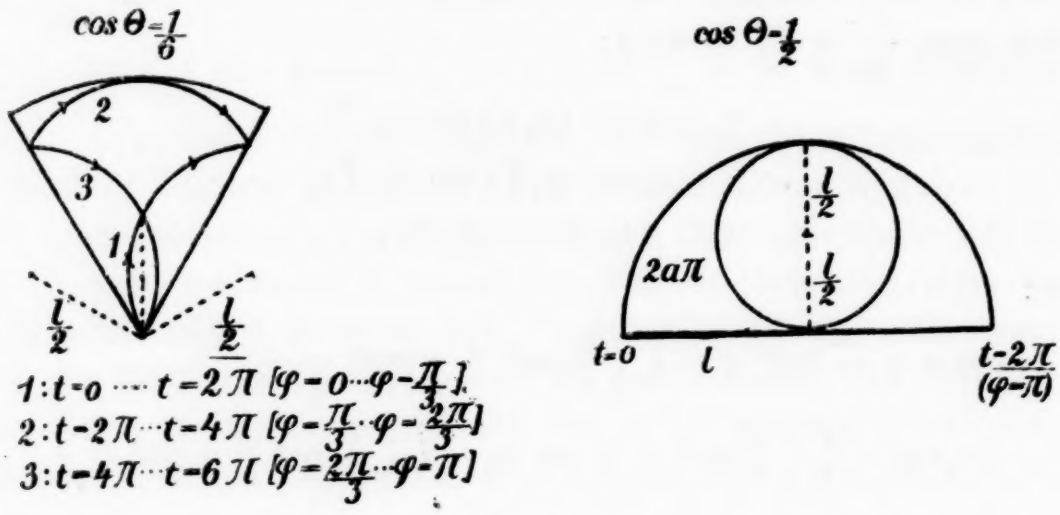


Fig. 4.

Kreises mit dem Radius $\frac{l}{2}$ einen Vollkreis zusammen ergeben. Ist $\cos\Theta = \frac{g_1}{g_2}$, so wird $g_1 l\pi = 2a\pi \cdot \frac{g_2}{2}$, das heißt es sind g_1 solcher Kreise mit dem Radius $\frac{l}{2}$, die sich auf $\frac{g_2}{2}$ Umläufe verteilen (bzw. $2g_1$ solcher Kreise mit g_2 Umläufen, wenn der Scheitelkegel hinzugenommen wird).

Die XY-Projektion dieser Raumkurven hat in Polarkoordinaten die besonders einfache Gestalt:

$$r = a\sin(\cos\Theta\, t) \quad \text{bzw.} \quad r = a\sin\frac{g_1 t}{g_2}.$$

Wird der Wert von $\cos\Theta$ irrational, so schließt sich die Kurve erst nach unendlich vielen Umläufen um den Kegel, die Raumkurve selbst ist dann keine algebraische Kurve mehr.

Die beiden Krümmungen dieser Raumkurven sind:

$$a^2\varkappa^2 = \sin^2\Theta\,\sin^2(\cos\Theta\, t) + 4\cos^2\Theta$$
$$a^3\tau\varkappa^3 = \sin\Theta\cos(\cos\Theta t)\{\sin^2\Theta\,\sin^2(\cos\Theta t) + 6\cos^2\Theta\},$$

so daß zwischen den beiden Krümmungen die Beziehung besteht:

$$a^6\tau^2\varkappa^4 + a^6\varkappa^6 - a^4\sin^2\Theta\,\varkappa^4 - a^2(1+2\cos^2\Theta)\,\varkappa^2 - 4\cos^4\Theta(1+3\cos^2\Theta) = 0.$$

Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume.

Von *L. Berwald* in Prag [1]).

I. Teil.

In der vorliegenden Abhandlung werden auf Grund einer Parallelübertragung, die zuerst — in rein analytischer Form — von Fräulein *E. Noether* [2]) angegeben worden ist, die zweidimensionalen allgemeinen (metrischen) [3]) Räume („R_2“) untersucht, d. h. jene zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, denen durch das Grundintegral eines regulären Variationsproblemes einfachster Art eine Maßbestimmung aufgeprägt ist. Die nächstliegenden Eigenschaften dieser und der n-dimensionalen allgemeinen Räume habe ich bereits in einer früheren Arbeit [4]) auseinandergesetzt. Bei dem Versuche, in die dortigen Betrachtungen die Untersuchungen von *G. Landsberg* [5]) einzuordnen, ergaben sich eine Reihe neuer Resultate, die im folgenden im Zusammenhange dargestellt werden.

Um dabei die Kenntnis der angeführten Abhandlung nicht voraussetzen zu müssen, werden in den beiden ersten Paragraphen die dort verwendeten Grundbegriffe und Methoden sogleich für den zweidimensionalen Fall entwickelt. Es sind das: der Begriff der *Parallelübertragung* und die aus ihm ableitbaren des *Krümmungstensors* und des *Grundtensors der Krümmung*; ferner die Begriffe der *Länge eines Vektors* und des *Winkels zweier Vektoren in bezug auf ein Linienelement* (§ 1); endlich die *Methoden des absoluten Differentialkalküls für allgemeine Räume*, die das Werkzeug für die weitere Untersuchung bilden (§ 2).

Im § 3 werden die für das Folgende wichtigsten Invarianten eines R_2 gegenüber Punkt- und Parametertransformationen eingeführt, vor allem der schon von

---

[1]) Einen Teil der Ergebnisse dieser Abhandlung findet man ohne Beweis zusammengestellt in der Note: *L. Berwald,* Zur Geometrie ebener Variationsprobleme. Lotos, Prag 74 (1926), S. 43—51.

[2]) *E. Noether*, Invarianten beliebiger Differentialausdrücke. Gött. Nachr. 1918, S. 37—44. Vgl. auch den Bericht derselben Autorin: Algebraische und Differentialinvarianten. Jahresbericht Deutsche Math.-Ver. 32 (1923), S. 177—184, bes. 182 ff.

[3]) Nicht metrische allgemeine Räume treten auf bei *L. Berwald,* Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Maßbestimmung. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. 34 (1925), S. 213—220.

[4]) *L. Berwald,* Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 40—73.

[5]) *G. Landsberg,* a) Über die Totalkrümmung. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. 16 (1907), S. 36—46; b) Krümmungstheorie und Variationsrechnung. Ebenda, S. 547—551; c) Über die Krümmung in der Variationsrechnung. Math. Ann. 65 (1908), S. 313—349.

A. L. Underhill [1]) angegebene ***Krümmungsskalar***, der sich auf das *Gauß*sche Krümmungsmaß reduziert, wenn die Funktion unter dem Grundintegral des R_2 (die „Grundfunktion" F) die Wurzel aus einer quadratischen Differentialform ist. Außer dem Krümmungsskalar erweist sich als besonders wichtig für die Kennzeichnung spezieller Klassen von R_2 der ***Hauptskalar*** des R_2, der durch

$$\Im = \frac{1}{4F^{\frac{1}{2}}F_1^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}}\right)$$

erklärt ist, wobei F_1 die bekannte *Weierstraß*sche Funktion bedeutet. Wenn man die Figur, die aus einem Vektor und einem Linienelemente im gleichen Punkte besteht, in bezug auf dieses Linienelement als ausgezeichnetes Linienelement parallel zu sich selbst längs eines willkürlichen Linienelementes verschiebt, so hängt die Änderung der Länge des Vektors bei diesem Prozeß im wesentlichen nur von $\left(\frac{d\Im}{ds}\right)_{\text{extremal}}$ ab; die Änderung jener Länge beim Umfahren eines infinitesimalen Parallelogrammes — also die *Streckenkrümmung* — nur von $\left(\frac{d^2\Im}{ds^2}\right)_{\text{extremal}}$. Dabei bezeichnen $\left(\frac{d\Im}{ds}\right)_{\text{extremal}}$, $\left(\frac{d^2\Im}{ds^2}\right)_{\text{extremal}}$ die erste und zweite Ableitung des Hauptskalars nach dem Bogen ($s = \int_{t_0}^{t} F dt$) jener Extremalen des Variationsproblemes $\delta \int_{t_0}^{t} F dt = 0$, deren Anfangselement das gegebene Linienelement ist.

Durch das identische Verschwinden der soeben angeschriebenen „extremalen" Ableitungen werden demnach invariante Klassen von zweidimensionalen allgemeinen Räumen mit besonders einfachen Eigenschaften definiert. Unter diesen Räumen werden in § 4 vor allem jene betrachtet, die im Sinne von *H. Weyl affinzusammenhängend* sind, d. h. für welche die sonst erst nach Auszeichnung eines Vektorfeldes erklärten Komponenten der Parallelübertragung nur vom Orte abhängen. Für sie (und nur für sie) verschwinden die kovarianten Ableitungen des *Hauptskalars* identisch. Ein affinzusammenhängender R_2, dessen Krümmungsskalar beständig Null ist, ist ein zweidimensionaler *Minkowski*scher Raum. Jeder andere affinzusammenhängende R_2 hat notwendigerweise einen konstanten Hauptskalar.

Zu den angeführten besonderen Klassen von R_2 in engster Beziehung stehen die Untersuchungen von *Landsberg* [2]) (§ 5). Die von ihm betrachteten Räume, in denen es ein Gegenstück zum *Gauß-Bonnet*schen Integralsatz gibt, lassen sich nämlich auch durch $\left(\frac{d\Im}{ds}\right)_{\text{extremal}} = 0$ kennzeichnen. Andererseits existiert eine (von der Richtung unabhängige) *Totalkrümmung* in seinem Sinne in allen R_2 mit

[1]) *A. L. Underhill*, Invariants of the function $f(x, y, x', y')$ in the calculus of variations. Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), S. 316—338. Vgl. auch *O. Bolza*, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin, bes. S. 227 f.

[2]) Siehe Anmerkung [5]) S. 191.

$\left(\frac{d^2\mathfrak{J}}{ds^2}\right)_{\text{extremal}} = 0$. Endlich führt eine konsequente Verfolgung des von *Landsberg* eingeschlagenen Weges auch bei beliebigen R_2 in besonders einfacher Weise zum *Underhill*schen Krümmungsskalar.

Die von *Landsberg* als *Winkel* bezeichnete Invariante zweier Richtungen, deren Bestimmung im allgemeinen eine Quadratur erfordert, bildet den Ausgangspunkt für die Entwicklungen des letzten Paragraphen, der sich mit einer umfassenden Klasse von R_2 beschäftigt, in denen dieser Winkel ohne Quadratur angegeben werden kann. Die betrachtete Klasse von R_2 läßt sich mittels der zweiten Ableitungen des Hauptskalars nach $\dot{x}, \dot{y}$ leicht in invarianter Weise kennzeichnen. Es werden alle zugehörigen Räume (d. h. die entsprechenden Gestalten der Grundfunktion) bestimmt, insbesondere auch alle R_2, deren Hauptskalar eine bloße Ortsfunktion ist. *Damit sind auch alle affinzusammenhängenden zweidimensionalen Räume bestimmt: es sind die Minkowski*schen R_2 *und außerdem die Nicht-Minkowski*schen R_2 *mit konstantem Hauptskalar, von denen es im reellen Gebiet drei verschiedene Typen gibt.* Die Stellung der affinzusammenhängenden R_2 mit konstantem Hauptskalar innerhalb der betrachteten Klasse wird durch den Satz charakterisiert, daß sie die einzigen R_2 ohne Streckenkrümmung sind, deren Hauptskalar nur vom Orte abhängt.

§ 1. Parallelübertragung und Metrik in zweidimensionalen allgemeinen Räumen.

1. Als zweidimensionalen allgemeinen (metrischen) Raum R_2 bezeichnen wir eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit M, in der durch das Grundintegral eines Variationsproblemes einfachster Art

$$(1) \qquad s = \int_{t_0}^{t} F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt\,, \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right)$$

auf jeder Kurve eine *Bogenlänge* definiert ist.

Von der Funktion $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ setzen wir etwa voraus, daß sie für alle Wertesysteme (x, y) aus M und für alle möglichen Wertesysteme $(\dot{x}, \dot{y})$ — mit Ausnahme des Wertesystemes $(0, 0)$, das wir von der Betrachtung ausschließen — analytisch-regulär und positiv [1]), ferner in $\dot{x}, \dot{y}$ positiv-homogen [2]) von erster Dimension ist. $x = x(t)$, $y = y(t)$ ist die als regulär vorausgesetzte Parameterdarstellung eines mit Richtungssinn (dem Sinn der wachsenden t) versehenen, also orientierten, reellen, analytisch-regulären Kurvenstückes („Kurve") in M.

Außerdem nehmen wir an, daß das Variationsproblem $\delta s = 0$ in dem betrachteten Bereich der Argumente $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ regulär, d. h. die Funktion

---

[1]) Diese Voraussetzungen lassen sich durch schwächere ersetzen. Insbesondere ist es für die Anwendungen bisweilen zweckmäßig, die Voraussetzung $F > 0$ fallen zu lassen. Wir werden aber in solchen Fällen lieber die Wertesysteme $\dot{x}, \dot{y}$ in jedem Punkte in geeigneter Weise beschränken; vgl. die Beispiele in Nr. 29 und 38.

[2]) Da im folgenden nur *positiv*-homogene Ausdrücke auftreten, sagen wir weiterhin „homogen" anstatt „positiv-homogen".

$$(2) \qquad F_1 = \frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = -\frac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}} = \frac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2} \quad [1])$$

von Null verschieden ist. Wir setzen im folgenden durchweg

$$(3) \qquad [F(x, y, \dot{x}, \dot{y})]^3 \cdot F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) > 0\,,$$

also bei der über F gemachten Annahme $F_1 > 0$ voraus [2]).

Im folgenden denken wir uns bisweilen die Bogenlänge s als unabhängige Veränderliche eingeführt und bezeichnen Ableitungen nach s durch angehängte Striche, so daß

$$x' = \frac{\dot{x}}{F(x, y, \dot{x}, \dot{y})}\,, \quad y' = \frac{\dot{y}}{F(x, y, \dot{x}, \dot{y})}$$

ist. Dann gilt wegen (1)

$$(4) \qquad F(x, y, x', y') = 1\,.$$

2. Aus der Differentialgleichung der Extremalen des Variationsproblemes $\delta s = 0$:

$$(5) \qquad F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - y'x'') = 0$$

und der aus (4) durch Differentiation nach s hervorgehenden Identität:

$$(6) \qquad \frac{dF}{ds} = x'F_x + y'F_y + x''F_{x'} + y''F_{y'} = 0$$

erhalten wir durch Auflösung nach x'', y'' die Differentialgleichungen der Extremalen in der Gestalt

$$(7) \qquad x'' + \varphi(x, y, x', y') = 0\,, \quad y'' + \psi(x, y, x', y') = 0\,.$$

Darin bedeuten $\varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, $\psi(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ die Funktionen

$$(8) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dfrac{1}{FF_1}\{\dot{x}F_1(\dot{x}F_x + \dot{y}F_y) + F_{\dot{y}}(F_{\dot{x}y} - F_{\dot{y}x})\}\,, \\ \psi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dfrac{1}{FF_1}\{\dot{y}F_1(\dot{x}F_x + \dot{y}F_y) - F_{\dot{x}}(F_{\dot{x}y} - F_{\dot{y}x})\}\,. \end{cases}$$

Sie sind in $\dot{x}, \dot{y}$ *homogen von zweiter Dimension.* Man kann daher die Gleichungen (7) auch in die Gestalt setzen

$$(7^*) \qquad \ddot{x} + \varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}\frac{d\log F}{dt}\,, \quad \ddot{y} + \psi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{y}\frac{d\log F}{dt}\,.$$

3. Wir ordnen jetzt jedem Punkte (x, y) des R_2 einen, etwa infinitesimalen Vektor (dx, dy) zu, das *ausgezeichnete Linienelement* dieses Punktes, und erklären sodann als *parallele Übertragung* des (kontravarianten) Vektors (ξ, η) im Punkte (x, y) von (x, y) nach dem beliebigen unendlich benachbarten Punkte $(x + \delta x, y + \delta y)$ den Übergang vom Vektor (ξ, η) im Punkte (x, y) zum Vektor

---

[1]) Angehängte Buchstaben bedeuten partielle Ableitungen.

[2]) Wenn F^2 eine quadratische Form in $\dot{x}, \dot{y}$ ist („*Gauß*scher Fall"), ist $F > 0$ im positiv-definiten Falle immer, im indefiniten erst nach geeigneter Einschränkung der Wertesysteme $\dot{x}, \dot{y}$ erfüllt. Im ersten Falle besteht (3), im zweiten ist $F^3 \cdot F_1 < 0$. Allgemein würden bei der Annahme $F^3 \cdot F_1 < 0$ die folgenden Betrachtungen Änderungen erleiden, analog denen, die im indefiniten *Gauß*schen Fall gegenüber dem definiten eintreten.

$(\xi + \delta\xi,\ \eta + \delta\eta)$ im Punkte $(x + \delta x,\ y + \delta y)$, wenn

$$(9)\quad \begin{cases} \delta\xi = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial dx^2}\,\xi\delta x + \frac{\partial^2\varphi}{\partial dx\partial dy}\,(\xi\delta y + \eta\delta x) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial dy^2}\,\eta\delta y\right\}, \\ \delta\eta = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial dx^2}\,\xi\delta x + \frac{\partial^2\psi}{\partial dx\partial dy}\,(\xi\delta y + \eta\delta x) + \frac{\partial^2\psi}{\partial dy^2}\,\eta\delta y\right\}. \end{cases}$$

Dabei sind in φ und ψ die Argumente x, y, dx, dy zu denken.

Die parallele Übertragung eines kovarianten Vektors (u, v) im Punkte (x, y) von (x, y) nach dem unendlich benachbarten Punkte $(x + \delta x,\ y + \delta y)$ ist dann eindeutig erklärt durch die Forderung, daß bei simultaner Parallelübertragung dieses Vektors (u, v) und eines beliebigen kontravarianten Vektors (ξ, η) der Skalar $u\xi + v\eta$ ungeändert bleibt. Analog für irgendwelche Tensoren.

4. Nach dem Vorstehenden hängt die Parallelübertragung in R_2 im allgemeinen außer vom Orte in der Mannigfaltigkeit auch noch ab von der Wahl des Feldes der ausgezeichneten Linienelemente. Sie ist dann und nur dann unabhängig von dieser Wahl, wenn $\varphi(x, y, dx, dy)$ und $\psi(x, y, dx, dy)$ quadratische Formen in den Veränderlichen dx, dy sind (mit Koeffizienten, die Funktionen von x, y sind). Ein allgemeiner Raum mit dieser besonderen Eigenschaft ist *affinzusammenhängend* im Sinne von *H. Weyl* [1]).

5. Durch parallele Herumführung des ausgezeichneten Linienelementes (dx, dy) im Punkte (x, y) um ein infinitesimales Parallelogramm erhält man

$$(10)\quad \begin{cases} \delta_1\delta dx - \delta\delta_1 dx = -K^1_{.12}\,(\delta x\,\delta_1 y - \delta_1 x\,\delta y), \\ \delta_1\delta dy - \delta\delta_1 dy = -K^2_{.12}\,(\delta x\,\delta_1 y - \delta_1 x\,\delta y), \end{cases}$$

wo

$$(11)\quad \begin{cases} K^1_{.12} = -K^1_{.21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial dx} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial dy}\right) \\ \qquad + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial dx\partial dy}\frac{\partial\varphi}{\partial dx} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial dx^2}\frac{\partial\varphi}{\partial dy} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial dy^2}\frac{\partial\psi}{\partial dx} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial dx\partial dy}\frac{\partial\psi}{\partial dy}\right), \\ K^2_{.12} = -K^2_{.21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial dx} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial dy}\right) \\ \qquad + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial dx\partial dy}\frac{\partial\varphi}{\partial dx} - \frac{\partial^2\psi}{\partial dx^2}\frac{\partial\varphi}{\partial dy} + \frac{\partial^2\psi}{\partial dy^2}\frac{\partial\psi}{\partial dx} - \frac{\partial^2\psi}{\partial dx\partial dy}\frac{\partial\psi}{\partial dy}\right) \end{cases}$$

ist. Die $K^i_{.kl} = -K^i_{.lk}$ $(i, k, l = 1, 2)$ sind die Komponenten eines in i kontravarianten, in k, l kovarianten Tensors, des *Grundtensors der Krümmung* unseres allgemeinen Raumes. Sie hängen von x, y, dx, dy ab, und sind in dx, dy homogen von der Dimension Eins.

6. Durch parallele Herumführung eines willkürlichen Vektors (ξ, η) im Punkte (x, y) um ein infinitesimales Parallelogramm gelangt man, wenn dabei das ausgezeichnete Linienelement (dx, dy) des Punktes (x, y) gleichfalls parallel mitgeführt wird, zum *Krümmungstensor* des allgemeinen Raumes

$$(12)\quad \begin{cases} \delta_1\delta\xi - \delta\delta_1\xi = -(K^1_{1\cdot 12}\,\xi + K^1_{2\cdot 12}\,\eta)\,(\delta x\,\delta_1 y - \delta y\,\delta_1 x), \\ \delta_1\delta\eta - \delta\delta_1\eta = -(K^2_{1\cdot 12}\,\xi + K^2_{2\cdot 12}\,\eta)\,(\delta x\,\delta_1 y - \delta y\,\delta_1 x). \end{cases}$$

---

[1]) Vgl. z. B. *H. Weyl*, Raum, Zeit, Materie. 3. Aufl., Berlin 1909, S. 100 ff.

Die Komponenten $K^k_{i\cdot lm} = -K^k_{i\cdot ml}$ des Krümmungstensors sind, wie man leicht durch Ausführung des in (12) angedeuteten Prozesses bestätigt, die Ableitungen der Komponenten des Grundtensors der Krümmung nach dx, dy:

$$(13) \qquad K^1_{1\cdot 12} = \frac{\partial K^1_{\cdot 12}}{\partial dx}, \quad K^1_{2\cdot 12} = \frac{\partial K^1_{\cdot 12}}{\partial dy}, \quad K^2_{1\cdot 12} = \frac{\partial K^2_{\cdot 12}}{\partial dx}, \quad K^2_{2\cdot 12} = \frac{\partial K^2_{\cdot 12}}{\partial dy}.$$

Sie sind dementsprechend in dx, dy homogen von nullter Dimension.

Mit ihnen im wesentlichen identisch sind die Komponenten K_{ik} des *verjüngten Krümmungstensors*:

$$(13^*) \quad K_{11} = +K^2_{1\cdot 12}, \quad K_{12} = -K^1_{1\cdot 12}, \quad K_{21} = +K^2_{2\cdot 12}, \quad K_{22} = -K^1_{2\cdot 12}.$$

7. Wir wenden uns jetzt zur *Metrik* im R_2. Dazu erklären wir als *Fundamentaltensor* den kovarianten Tensor zweiter Stufe mit den Komponenten

$$(14) \qquad \begin{cases} e = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2(F^2)}{\partial \dot{x}^2} = FF_1\dot{y}^2 + (F_{\dot{x}})^2, \\ f = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2(F^2)}{\partial \dot{x}\partial \dot{y}} = -FF_1\dot{x}\dot{y} + F_{\dot{x}}F_{\dot{y}}, \\ g = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2(F^2)}{\partial \dot{y}^2} = FF_1\dot{x}^2 + (F_{\dot{y}})^2 \quad [1]). \end{cases}$$

Diese sind in $\dot{x}, \dot{y}$ homogen von nullter Dimension, so daß

$$(15) \qquad e(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = e(x, y, x', y') = e(x, y, dx, dy) \qquad \text{usw.}$$

Aus (14) folgt leicht

$$(16) \quad e\dot{x} + f\dot{y} = FF_{\dot{x}}, \quad f\dot{x} + g\dot{y} = FF_{\dot{y}}, \quad e\dot{x}^2 + 2f\dot{x}\dot{y} + g\dot{y}^2 = F^2$$

und

$$(17) \qquad eg - f^2 = F^3F_1.$$

Bei unseren Voraussetzungen (Nr. 1) sind also $e, g, eg - f^2$ durchwegs *positiv*.

8. Mittels des Fundamentaltensors läßt sich im R_2 ein *Längen- und Winkelbegriff* definieren [2]).

Die Länge l eines beliebigen Vektors (ξ, η) im Punkte (x, y) in bezug auf das willkürliche Linienelement $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ [3]) werde erklärt durch

$$(18) \qquad l = \sqrt{e\xi^2 + 2f\xi\eta + g\eta^2}$$

---

[1]) Wir denken uns jetzt in F die Argumente $x, y, \dot{x}, \dot{y}$.

[2]) Die Längen- und Winkelmessung mittels des Fundamentaltensors ist (für eine beliebige Dimensionenzahl) unabhängig eingeführt worden von *J. L. Synge*, A generalization of the Riemannian line-element. Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), S. 61—67; *J. H. Taylor*, A generalization of Levi-Civitas parallelism and the Frenet formulas. Ebenda, S. 246—264, und dem Verfasser, a. a. O. Anm. [3]) S. 191. Die Möglichkeit der Winkelmessung ist übrigens schon angedeutet bei *P. Finsler*, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Diss. Göttingen, 1918, S. 42 f. Dort tritt auch implicite der Fundamentaltensor auf, ebenso bei *L. Berwald*, Über die erste Krümmung der Kurven bei allgemeiner Maßbestimmung. Lotos, Prag, 67/68 (1919—1920), S. 52—56.

[3]) Mit $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ oder auch (x, y, dx, dy) bezeichnen wir das (orientierte) Linienelement im Punkte (x, y), dessen Richtung durch den Einheitsvektor (x', y') bestimmt ist.

und der (zwischen 0 und π liegende) Winkel ω zweier Vektoren (ξ, η) und $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ im Punkte (x, y) in bezug auf das willkürliche Linienelement $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ durch

$$\cos\omega = \frac{e\xi\bar{\xi} + f(\xi\bar{\eta} + \bar{\xi}\eta) + g\eta\bar{\eta}}{\sqrt{e\xi^2 + 2f\xi\eta + g\eta^2}\cdot\sqrt{e\bar{\xi}^2 + 2f\bar{\xi}\bar{\eta} + g\bar{\eta}^2}}. \quad (19)$$ [1])

In e, f, g sind dabei die Argumente $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ zu nehmen.

Wenn der Vektor $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ insbesondere die Richtung des Linienelementes $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ hat, so erweist sich die *Orthogonalitätsbedingung* $\omega = \frac{\pi}{2}$ wegen (16) als gleichbedeutend mit der *Transversalitätsbedingung*

$$\xi F_{\dot{x}}(x, y, \bar{\xi}, \bar{\eta}) + \eta F_{\dot{y}}(x, y, \bar{\xi}, \bar{\eta}) = 0. \quad (20)$$

9. Als *Flächeninhalt Π* des von zwei Vektoren (ξ, η) und $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ im Punkte (x, y) aufgespannten Parallelogrammes in bezug auf das willkürliche Linienelement $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ erklären wir den Ausdruck

$$\Pi = \sqrt{eg - f^2}\cdot(\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}). \quad (21)$$

Der Absolutwert von Π ist gleich $l\cdot\bar{l}\sin\omega$, wobei $l, \bar{l}$ die Längen und ω den Winkel der beiden Vektoren in bezug auf das Linienelement bedeuten.

Entsprechend wird man als *Flächeninhalt eines Gebietes in bezug auf ein Feld von Kurven*

$$x = x(t, a), \qquad y = y(t, a) \quad (22)$$

das über das Gebiet erstreckte Doppelintegral

$$\Omega = \iint\sqrt{eg - f^2}\,dxdy = \iint\sqrt{F^3F_1}\,dxdy \quad (23)$$

definieren, wobei in den Funktionen unter dem Integralzeichen für die Argumente $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ die aus (22) folgenden Werte zu nehmen sind und die Regel für die Einführung neuer Veränderlicher in ein Doppelintegral zu beachten ist [2]).

10. Denjenigen Vektor im Punkte (x, y), der in bezug auf das willkürliche Linienelement $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ die Länge 1 hat und transversal zu diesem Linienelement steht, nennen wir den *Transversaleinheitsvektor* des Linienelementes. Seine Komponenten bestimmen wir eindeutig durch

$$\begin{cases} h = \dfrac{F_{\dot{y}}}{\sqrt{F^3F_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{eg - f^2}}\dfrac{f\dot{x} + g\dot{y}}{F}, \\ k = -\dfrac{F_{\dot{x}}}{\sqrt{F^3F_1}} = -\dfrac{1}{\sqrt{eg - f^2}}\dfrac{e\dot{x} + f\dot{y}}{F}. \end{cases} \quad (24)$$ [3])

[1]) Wir setzen ein- für allemal fest, daß alle Quadratwurzeln, die auftreten, *positiv* zu ziehen sind. Bei dieser Festsetzung sind die weiterhin einzuführenden Invarianten, soweit in ihre Definition die Wurzel $\sqrt{eg - f^2} = \sqrt{F^3F_1}$ wesentlich eingeht, nur gegenüber Punkttransformationen mit *positiver* Funktionaldeterminante invariant; bei Punkttransformationen mit negativer Funktionaldeterminante gehen sie in den entgegengesetzten Wert über.

[2]) Dieser Inhaltsbegriff tritt zuerst auf bei *P. Funk* und *L. Berwald,* Flächeninhalt und Winkel in der Variationsrechnung. Lotos, Prag, 67/68 (1919—20), S. 45—49.

[3]) Dieser Vektor, oder vielmehr der entgegengesetzte, findet sich explicite anscheinend zuerst

Er spannt mit dem Einheitsvektor (x', y') in der Richtung des Linienelementes im Punkte (x, y) ein Parallelogramm auf, dessen Flächeninhalt $\sqrt{eg - f^2}\,(hy' - kx')$ in bezug auf das Linienelement gleich 1 ist.

§ 2. Verallgemeinerung des absoluten Differentialkalküls.

11. Wir bedienen uns bei der Untersuchung allgemeiner Räume einer Verallgemeinerung des absoluten Differentialkalküls, die wir nunmehr soweit entwickeln, als es für den Fall zweier Dimensionen erforderlich ist. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, die Komponenten von Tensoren durch angehängte Zeiger zu bezeichnen. Wir setzen demgemäß

$$(25)\quad \begin{cases} \xi = \xi^1, \quad \eta = \xi^2; \quad \dot{x} = \dot{x}^1, \quad \dot{y} = \dot{x}^2; \quad \text{usw.}; \\ e = g_{11}, \quad f = g_{12} = g_{21}, \quad g = g_{22}; \\ \dfrac{g}{eg - f^2} = g^{11}, \quad -\dfrac{f}{eg - f^2} = g^{12} = g^{21}, \quad \dfrac{e}{eg - f^2} = g^{22}, \end{cases}$$

und außerdem

$$(26)\qquad x = x^1, \quad y = x^2; \quad \varphi = \varphi^1, \quad \psi = \varphi^2; \quad eg - f^2 = G.$$

Endlich schreiben wir für $f(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ kurz $f(x, \dot{x})$; entsprechend für Tensoren. Die Zeiger $i, k, l \ldots$ nehmen im folgenden die Werte 1, 2 an. Über jeden Zeiger, der in einer Formel einmal oben und einmal unten auftritt, ist von 1 bis 2 zu summieren [1]).

12. Es seien $\xi^{k_1 k_2 \ldots k_m}_{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\, l_1 l_2 \ldots l_r}(x, \dot{x}) = \xi^{(k)}_{\cdot\,(l)}(x, \dot{x})$ die in den l kovarianten, in den k kontravarianten Komponenten eines *Tensors* $(m + r)$-ter Stufe. (k) bezeichnet kurz den Komplex der kontravarianten Zeiger $k_1, k_2, \ldots, k_m$; (l) den der kovarianten Zeiger $l_1, l_2, \ldots, l_r$. Dann setzen wir

$$(27)\quad \xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/i} = \frac{\partial\, \xi^{(k)}_{\cdot\,(l)}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial\, \xi^{(k)}_{\cdot\,(l)}}{\partial \dot{x}^p}\frac{\partial\, \varphi^p}{\partial \dot{x}^i} + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \xi^{k_1 k_2 \ldots k_{\mu-1} p k_{\mu+1} \ldots k_m}_{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\,(l)}\frac{\partial^2 \varphi^{k_\mu}}{\partial \dot{x}^p\, \partial \dot{x}^i}$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \xi^{(k)}_{\cdot\, l_1 l_2 \ldots l_{\varrho-1} p l_{\varrho+1} \ldots l_r}\frac{\partial^2 \varphi^p}{\partial \dot{x}^{l_\varrho}\partial \dot{x}^i},$$

also insbesondere für einen Skalar f:

$$(27^*)\qquad f_{/i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^p}\frac{\partial\, \varphi^p}{\partial \dot{x}^i}.$$

In (27) sind beiderseits $(x, \dot{x})$ als Argumente zu denken. Die $\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/i}$ sind die in den k kontravarianten, in den l und in i kovarianten Komponenten eines Tensors $(m + r + 1)$-ter Stufe, den wir die (*erste*) *kovariante Ableitung* des Tensors mit den Komponenten $\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)}$ nennen. $\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/i}$ bezeichnen wir auch als *kovariante Ab-*

---

bei *P. Funk*, Über den Begriff „extremale Krümmung" und eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse. Math. Zeitschr. 3 (1919), S. 87—92.

[1]) Sofern nicht ausdrücklich etwas anderes vermerkt wird, gelten die Definitionen und Formeln, die in Nr. 11—19 auftreten, unverändert für allgemeine Räume von beliebiger Dimensionenzahl, wenn darin die Zeiger alle Werte von 1 bis n durchlaufen und eventuelle Summationen von 1 bis n ausgeführt werden.

leitung dieses Tensors *nach dem Zeiger i.* Wenn die $\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)}(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}$ homogen von der Dimension h sind, so gilt das Gleiche auch von den $\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/i}(x, \dot{x})$.

Die kovariante Ableitung der ersten kovarianten Ableitung eines Tensors von den Komponenten $\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)}$ nennen wir seine *zweite kovariante Ableitung* (Komponenten $\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/ij}$), usf. Für die kovarianten Ableitungen bestehen dieselben Rechenregeln, wie für gewöhnliche partielle Ableitungen.

13. In entsprechender Weise wie für Tensoren läßt sich auch für *Tensordichten* [1]) der Begriff der kovarianten Ableitung erklären. Es seien $\mathfrak{w}^{k_1 k_2 \dots k_m}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,l_1 l_2 \dots l_r}(x, \dot{x}) = \mathfrak{w}^{(k)}_{\cdot\,(l)}(x, \dot{x})$ die in den l kovarianten, in den k kontravarianten Komponenten einer Tensordichte $(m + r)$-ter Stufe. Dann sind

$$(28)\quad \mathfrak{w}^{(k)}_{\cdot\,(l)/i} = \frac{\partial\, \mathfrak{w}^{(k)}_{\cdot\,(l)}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial\, \mathfrak{w}^{(k)}_{\cdot\,(l)}}{\partial \dot{x}^p}\frac{\partial\, \varphi^p}{\partial \dot{x}^i} + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \mathfrak{w}^{k_1 k_2 \dots k_{\mu-1}\, p\, k_{\mu+1} \dots k_m}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,(l)}\frac{\partial^2 \varphi^{k_\mu}}{\partial \dot{x}^p \partial \dot{x}^i}$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mathfrak{w}^{(k)}_{\cdot\,l_1 l_2 \dots l_{\varrho-1}\, p\, l_{\varrho+1} \dots l_r}\frac{\partial^2 \varphi^p}{\partial \dot{x}^{l_\varrho} \partial \dot{x}^i} - \frac{1}{2}\mathfrak{w}^{(k)}_{\cdot\,(l)}\frac{\partial^2 \varphi^p}{\partial \dot{x}^p \partial \dot{x}^i}$$

die in den k kontravarianten, in den l und in i kovarianten Komponenten einer Tensordichte $(m + r + 1)$-ter Stufe, der (*ersten*) *kovarianten Ableitung* der Tensordichte mit den Komponenten $\mathfrak{w}^{(k)}_{\cdot\,(l)}$.

Alles oben über die kovarianten Ableitungen von Tensoren Gesagte gilt in entsprechender Weise auch von den kovarianten Ableitungen der Tensordichten.

14. Stellen wir gleich hier einige Beispiele zusammen, von denen wir weiterhin Gebrauch zu machen haben.

Erstens ist:

$$(29)\qquad \dot{x}^l{}_{/i} = 0;$$

man hat nämlich nach (27)

$$\dot{x}^l{}_{/i} = \frac{\partial \dot{x}^l}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{x}^l}{\partial \dot{x}^p}\frac{\partial\, \varphi^p}{\partial \dot{x}^i} + \frac{1}{2}\dot{x}^p\frac{\partial^2 \varphi^l}{\partial \dot{x}^p \partial \dot{x}^i}.$$

und hierin verschwindet die rechte Seite, weil die φ^i homogen von zweiter Dimension in den $\dot{x}$ sind (Nr. 2).

Ferner hat man für einen kovarianten Vektor mit den Komponenten ξ_i:

$$(30)\qquad \xi_{i/k} - \xi_{k/i} = \frac{\partial\, \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial\, \xi_k}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, \xi_i}{\partial \dot{x}^p}\frac{\partial\, \varphi^p}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial\, \xi_k}{\partial \dot{x}^p}\frac{\partial\, \varphi^p}{\partial \dot{x}^i}\right).$$

Wenn die ξ_i nur vom Orte abhängen, ist daher

$$(30^*)\qquad \xi_{i/k} - \xi_{k/i} = \frac{\partial\, \xi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial\, \xi_k}{\partial x_i}.$$

Endlich gilt für die skalare Dichte $\mathfrak{w} = \sqrt{G}$:

$$(31)\qquad (\sqrt{G})_{/i} = \frac{\partial(\sqrt{G})}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial(\sqrt{G})}{\partial \dot{x}^p}\frac{\partial\, \varphi^p}{\partial \dot{x}^i} - \frac{1}{2}\sqrt{G}\frac{\partial^2 \varphi^p}{\partial \dot{x}^p \partial \dot{x}^i},$$

wie man aus (28) oder (26) und (27) ableitet.

---

[1]) Vgl. *H. Weyl*, Raum, Zeit, Materie. 3. Aufl. 1919, S. 98ff., 104f.

15. Ein zweiter Differentiationsprozeß, der aus einem Tensor einen neuen Tensor erzeugt, ist die Differentiation nach den $\dot{x}$. Wenn $\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)}(x, \dot{x})$ wieder die in den k kontravarianten, in den l kovarianten Komponenten eines Tensors $(m+r)$-ter Stufe sind, so sind die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\left[\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)}(x, \dot{x})\right] = \xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/\dot{x}^i}(x, \dot{x}) \tag{32}$$

die in den k kontravarianten, in den l und in i kovarianten Komponenten eines Tensors $(m+r+1)$-ter Stufe. Sind die $\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)}(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}$ homogen von der Dimension h, so sind es die $\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/\dot{x}^i}$ in der Dimension $h-1$ [1]). Entsprechendes gilt für Tensordichten.

16. Bei *Vertauschung der Zeiger in den zweiten kovarianten Ableitungen eines Tensors* bestehen die Formeln

$$\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/ij} - \xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/ji} = -\,\xi^{(k)}_{\cdot\,(l)/\dot{x}^p}\,K^p_{\cdot\,ij} + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \xi^{k_1 k_2 \dots k_{\mu-1}\,p\,k_{\mu+1}\dots k_m}_{\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad

$$(36)\quad \mathfrak{w}^{(k)}_{\cdot\,(l)/\dot{x}^i/j} - \mathfrak{w}^{(k)}_{\cdot\,(l)/j/\dot{x}^i} = -\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \mathfrak{w}^{k_1 k_2 \ldots k_{\mu-1}\, p\, k_{\mu+1} \ldots k_m}_{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,(l)} \frac{\partial^3 \varphi^{k_\mu}}{\partial \dot{x}^p \partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mathfrak{w}^{(k)}_{\cdot\, l_1 l_2 \ldots l_{\varrho-1}\, p\, l_{\varrho+1} \ldots l_r} \frac{\partial^3 \varphi^p}{\partial \dot{x}^{l_\varrho} \partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{w}^{(k)}_{\cdot\,(l)} \frac{\partial^3 \varphi^p}{\partial \dot{x}^p \partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\,.$$

Aus (34) geht hervor, daß die $\frac{1}{2}\frac{\partial^3 \varphi^p}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^l}$ die in p kontravarianten, in i, k, l kovarianten Komponenten eines *Tensors* vierter Stufe sind. Sie sind in den $\dot{x}$ homogen von (-1)-ter Dimension. Wegen der Homogeneität zweiter Dimension der φ^i in den $\dot{x}$ bestehen die Identitäten

$$(37)\qquad \frac{\partial^3 \varphi^p}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^l}\,\dot{x}^l = 0\,.$$

17. Die Differentiation nach dem Bogen der vom Punkte (x, y) in der Anfangsrichtung (x', y') ausgehenden Extremalen des Variationsproblems $\delta s = 0$ werde im folgenden durch $\left(\frac{d}{ds}\right)_{\text{extremal}}$ bezeichnet. Für irgendeinen Skalar f, der von den x, x' abhängt, ist dann

$$(38)\qquad \left(\frac{df}{ds}\right)_{\text{extremal}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,x'^i - \frac{\partial f}{\partial x'^i}\,\varphi^i = x'^i f_{/i}\,,$$

$$(39)\qquad \left(\frac{d^2 f}{ds^2}\right)_{\text{extremal}} = x'^i x'^k f_{/ik}\,,$$

wie aus der Homogeneitätseigenschaft der φ^i und aus der Definition (27) der kovarianten Ableitung folgt.

18. Die Identität (6) läßt sich jetzt, wenn wir *extremal* ableiten, so schreiben:

$$(40)\qquad x'^i F_{/i} = 0\,.$$

Dabei sind in F die Argumente x, x' zu setzen. Aus (40) folgt durch Differentiation nach x'^k bei Berücksichtigung der Vertauschungsformel (34*)

$$(41)\qquad x'^i F_{x'^k/i} + F_{/k} = 0\,.$$

Andererseits müssen die Differentialgleichungen der Extremalen von $\delta s = 0$, die durch Nullsetzen der *Lagrange*schen Ausdrücke entstehen, identisch erfüllt sein, wenn man darin für x'', y'' ihre Werte aus (7) setzt. Man erhält so die Identitäten

$$(42)\qquad x'^i F_{x'^k/i} - F_{/k} = 0\,.$$

Somit ist

$$(43)\qquad F_{/k}(x, x') = 0\,,$$

und, da die linke Seite von (43) in den x' homogen von erster Dimension ist, auch

$$(44)\qquad F_{/k}(x, \dot{x}) = 0$$

identisch in den $x, \dot{x}$. Durch partielle Differentiation von (44) nach $\dot{x}^i$ und Anwendung von (34*) folgt

$$(45)\qquad F_{\dot{x}^i/k} = 0$$

und hieraus weiter

(46) $$F_{\dot{x}^i/k/\dot{x}^l} = 0\,.$$

Entsprechend ergibt sich aus (44) durch kovariante Ableitung

(47) $$F_{/ki} = 0\,.$$

Subtrahiert man von (47) die durch Vertauschung der Zeiger i und k aus (47) hervorgehende Identität und wendet (33*) an, so erhält man identisch in den x, x

(48) $$F_{\dot{x}^p} K^p_{\cdot ik} = 0\,.$$

19. An Stelle des sogenannten *Lemmas von Ricci* treten hier die Identitäten

(49) $$g_{ik/l} = \frac{1}{2} F F_{\dot{x}^p} \frac{\partial^3 \varphi^p}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^l} = \frac{1}{2} g_{pq} \dot{x}^q \frac{\partial^3 \varphi^p}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^l}\,.$$

Man leitet sie ab, indem man von den Definitionsgleichungen

(14*) $$g_{ik} = \frac{1}{2} (F^2)_{/\dot{x}^i \dot{x}^k} = F F_{\dot{x}^i \dot{x}^k} + F_{\dot{x}^i} F_{\dot{x}^k}$$

ausgeht, die Vertauschungsformel (34) in der Gestalt

(34**) $$F_{\dot{x}^i \dot{x}^k/l} - F_{\dot{x}^i/l/\dot{x}^k} = \frac{1}{2} F_{\dot{x}^p} \frac{\partial^3 \varphi^p}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^l}$$

benutzt und (42) — (45) sowie (16) beachtet.

Weiter ergibt (34), auf die g_{ik} angewendet

(50) $$g_{ik/\dot{x}^l/m} - g_{ik/\dot{x}^m/l} = g_{ik/m/\dot{x}^l} - g_{ik/l/\dot{x}^m}\,.$$

Endlich schreiben wir noch zwei Formeln für die Determinante G an, die aus den Gleichungen (35) und (36) ohne Schwierigkeit folgen, wenn man sie auf die skalare Dichte $\mathfrak{w} = \sqrt{G}$ anwendet, nämlich

(51) $$\frac{1}{G} \{G_{\dot{x}^m/l} - G_{/l/\dot{x}^m}\} = \frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^l \partial \dot{x}^m}$$

und

(52) $$G_{/lm} - G_{/ml} = -2\sqrt{G} \frac{\partial (K^p_{\cdot lm} \sqrt{G})}{\partial \dot{x}^p}\,.$$

§ 3. Die grundlegenden Skalare.

20. Aus den Identitäten (48), die in unserer ursprünglichen Schreibweise

(48*) $$F_{\dot{x}} K^1_{\cdot 12} + F_{\dot{y}} K^2_{\cdot 12} = 0$$

lauten, folgt die Existenz eines Skalares $\mathfrak{K}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, so daß

(53) $$\begin{cases} K^1_{\cdot 12} = -\mathfrak{K} F F_{\dot{y}} = -\mathfrak{K}(f\dot{x} + g\dot{y}), \\ K^2_{\cdot 12} = +\mathfrak{K} F F_{\dot{x}} = +\mathfrak{K}(e\dot{x} + f\dot{y}) \end{cases}$$

ist. Dieser *Krümmungsskalar*

$$\mathfrak{K} = \frac{\dot{x} K^2_{\cdot 12} - \dot{y} K^1_{\cdot 12}}{F^2} = \frac{1}{F^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \dot{x}} \right) \dot{y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \dot{x}} \right) \dot{x} \right.$$
$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} \right) \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \dot{y}^2} \right) \psi$$
$$\left. - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right)^2 + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \dot{y}} \right)^2 \right] \right\},$$

der zuerst auf ganz anderem Wege von Herrn *A. L. Underhill* [1]) gefunden wurde, reduziert sich auf das gewöhnliche Krümmungsmaß, wenn die Grundfunktion $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ die Quadratwurzel aus einer quadratischen Form in $\dot{x}, \dot{y}$ ist. Er ist in $\dot{x}, \dot{y}$ homogen von nullter Dimension.

Nach Einführung des Krümmungsskalars nimmt die Formel (33*) die Gestalt an

$$f_{/12} - f_{/21} = \mathfrak{K} F (f_{\dot{x}} F_{\dot{y}} - f_{\dot{y}} F_{\dot{x}}). \tag{33**}$$

21. *Der verjüngte Krümmungstensor* (Nr. 6) *ist dann und nur dann symmetrisch, wenn der Krümmungsskalar eine bloße Ortsfunktion ist.*

Aus (13*), (13) und (53) folgt nämlich

$$K_{12} - K_{21} = -\frac{\partial K^1_{\cdot 12}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial K^2_{\cdot 12}}{\partial \dot{y}} = F(\mathfrak{K}_{\dot{x}} F_{\dot{y}} - \mathfrak{K}_{\dot{y}} F_{\dot{x}}), \tag{55}$$

und da $\mathfrak{K}$ in $\dot{x}, \dot{y}$ homogen von nullter Dimension ist, so verschwinden auch umgekehrt $\mathfrak{K}_{\dot{x}}$ und $\mathfrak{K}_{\dot{y}}$ nur dann, und zwar beide zugleich, wenn $K_{12} = K_{21}$ ist. Somit gibt es in einem zweidimensionalen allgemeinen Raum neben $\mathfrak{K}$ noch einen weiteren von der Krümmung herrührenden Skalar

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \frac{K_{12} - K_{21}}{\sqrt{eg - f^2}} = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{K}_{\dot{x}} F_{\dot{y}} - \mathfrak{K}_{\dot{y}} F_{\dot{x}}}{\sqrt{F F_1}}. \tag{56}$$

die Asymmetrie des verjüngten Krümmungstensors. Sie ist in $\dot{x}, \dot{y}$ gleichfalls homogen von nullter Dimension. Die Ableitungen $\mathfrak{K}_{\dot{x}}, \mathfrak{K}_{\dot{y}}$ hängen mit $\mathfrak{A}$ folgendermaßen zusammen

$$\mathfrak{K}_{\dot{x}} = 2\,\mathfrak{A} \frac{\sqrt{eg - f^2}}{F^2} \dot{y}, \qquad \mathfrak{K}_{\dot{y}} = -2\,\mathfrak{A} \frac{\sqrt{eg - f^2}}{F^2} \dot{x}. \tag{57}$$

22. Zu einem dritten Skalar führt die Untersuchung der Frage, wie sich die quadrierte Länge l^2 eines Vektors (ξ, η) im Punkte (x, y) in bezug auf ein Linienelement $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ ändert, wenn man die Richtung dieses Linienelementes unendlich wenig variiert.

Wir ersetzen dazu $(\dot{x}, \dot{y})$ durch $(\dot{x} + \varepsilon F \bar{\xi}, \dot{y} + \varepsilon F \bar{\eta})$, wo ε infinitesimal ist. Dann ist die entsprechende Änderung $\delta_0(l^2)$ von l^2 (Gl. (18)) bis auf Glieder zweiter und höherer Ordnung in ε:

$$\delta_0(l^2) = \varepsilon F \left\{ \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{x}} \xi^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \xi\eta + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \eta^2 \right) \bar{\xi} + \left(\frac{\partial e}{\partial \dot{y}} \xi^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \xi\eta + \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} \eta^2 \right) \bar{\eta} \right\}. \tag{58}$$

Nun sind die Komponenten e, f, g des Fundamentaltensors die zweiten partiellen Ableitungen von F^2 nach $\dot{x}$ und $\dot{y}$ und als solche in $\dot{x}, \dot{y}$ homogen von nullter Dimension. Hieraus ergibt sich leicht

$$\frac{\partial e}{\partial \dot{x}} = -\lambda \dot{y}^3, \quad \frac{\partial e}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \lambda \dot{x} \dot{y}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = -\lambda \dot{x}^2 \dot{y}, \quad \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} = \lambda \dot{x}^3 \tag{59}$$

und

$$\frac{\partial (eg - f^2)}{\partial \dot{x}} = -\lambda F^2 \dot{y}, \qquad \frac{\partial (eg - f^2)}{\partial \dot{y}} = +\lambda F^2 \dot{x}. \tag{60}$$

---

[1]) Siehe Anm. [1]) S. 192.

Darin ist

$$\lambda = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}}, \tag{61}$$

wie man durch direkte Berechnung, z. B. von $\frac{\partial e}{\partial \dot{x}}$ aus (14) findet.

Aus λ, das in $\dot{x}, \dot{y}$ von (-4)-ter Dimension homogen und kein Skalar ist, läßt sich durch Hinzufügung eines geeigneten Nenners ein Skalar bilden

$$\mathfrak{J} = \frac{\lambda F^4}{4(eg - f^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4F^{\frac{1}{2}} F_1^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}} \right). \tag{62}$$

Wir nennen $\mathfrak{J}$ den *Hauptskalar* des allgemeinen Raumes. Er ist aus F durch bloße Differentiationen nach $\dot{x}$ und $\dot{y}$ herleitbar und in $\dot{x}, \dot{y}$ von nullter Dimension homogen. Daher bleibt er bei Parametertransformation ungeändert und ebenso auch bei *konformer Transformation* des allgemeinen Raumes, d. h. beim Übergang vom Raume mit der Grundfunktion $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ zu demjenigen mit der Grundfunktion $\chi(x, y) \cdot F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, wobei χ eine willkürliche (etwa analytisch-reguläre) Ortsfunktion bedeutet.

Bei Einführung des Hauptskalars in (58) mittels (59), (61), (62) ergibt sich für die gesuchte Änderung der quadrierten Länge des Vektors (ξ, η)

$$\delta_0(l^2) = 4\varepsilon \mathfrak{J} \frac{\sqrt{(eg - f^2)^3}}{F^3} (\dot{x}\eta - \dot{y}\xi)^2 (\dot{x}\bar{\eta} - \dot{y}\bar{\xi}) = 4\varepsilon \mathfrak{J} \Pi^2 \overline{\Pi}, \tag{63}$$

wobei $\Pi[\overline{\Pi}]$ den Flächeninhalt des von den Vektoren (x', y') und $(\xi, \eta)[\bar{\xi}, \bar{\eta}]$ im Punkte (x, y) aufgespannten Parallelogrammes in bezug auf das Linienelement $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ bedeutet (Nr. 9). Wählt man speziell $\xi = \bar{\xi} = h$, $\eta = \bar{\eta} = k$ (Nr. 10), so geht (63) über in

$$\delta_0(l^2) = -4\varepsilon \mathfrak{J}. \tag{63*}$$

23. Wir gehen jetzt zu der Frage über, wie sich die quadrierte Länge l^2 eines Vektors (ξ, η) im Punkte (x, y) in bezug auf das willkürliche Linienelement $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ ändert, wenn man dieses als ausgezeichnetes Linienelement des Punktes ansieht, und die Figur, die aus dem Vektor (ξ, η) und dem Linienelemente $(\dot{x}, \dot{y})$ besteht, vom Punkte (x, y) nach dem beliebigen unendlich benachbarten Punkte $(x + \delta x, y + \delta y)$ parallel überträgt.

Die Änderung $\delta(l^2)$ bei dieser Parallelübertragung ist

$$\delta(l^2) = (e_{/1}\xi^2 + 2f_{/1}\xi\eta + g_{/1}\eta^2)\delta x + (e_{/2}\xi^2 + 2f_{/2}\xi\eta + g_{/2}\eta^2)\delta y. \tag{64}$$

Berechnen wir die Größen, die in (64) rechts auftreten! Zunächst folgt aus (37) für $p, i, k = 1, 2$ in unseren jetzigen Bezeichnungen

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \dot{x}^3} = -\dot{y}^3 \cdot \sigma, & \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \dot{x}^2 \partial \dot{y}} = +\dot{x}\dot{y}^2 \cdot \sigma, & \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}^2} = -\dot{x}^2\dot{y} \cdot \sigma, & \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \dot{y}^3} = +\dot{x}^3 \cdot \sigma, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \psi}{\partial \dot{x}^3} = +\dot{y}^3 \cdot \varrho, & \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \psi}{\partial \dot{x}^2 \partial \dot{y}} = -\dot{x}\dot{y}^2 \cdot \varrho, & \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \psi}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}^2} = +\dot{x}^2\dot{y} \cdot \varrho, & \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \psi}{\partial \dot{y}^3} = -\dot{x}^3 \cdot \varrho, \end{cases} \tag{65}$$

wo ϱ, σ zwei Funktionen von $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ bezeichnen, die in $\dot{x}, \dot{y}$ homogen von (-4)-ter Dimension sind. Durch Einsetzen der Werte (65) in (49) erhalten wir

(66) $e_{/1} = -\tau\dot{y}^3, \quad e_{/2} = f_{/1} = +\tau\dot{x}\dot{y}^2, \quad f_{/2} = g_{/1} = -\tau\dot{x}^2\dot{y}, \quad g_{/2} = +\tau\dot{x}^3$

mit

(67) $$\tau = F(F_{\dot{x}}\sigma - F_{\dot{y}}\varrho).$$

τ ist also in $\dot{x}, \dot{y}$ homogen von der Dimension (-3).

Beiläufig merken wir noch die Gleichungen

(68) $$(eg - f^2)_{/1} = -\tau F^2\dot{y}, \quad (eg - f^2)_{/2} = +\tau F^2\dot{x}$$

an, die aus (66) folgen.

Die durch (67) definierte Funktion τ hängt nun in einfacher Weise mit dem Hauptskalar $\mathfrak{J}$ zusammen. Die Gleichungen (50) geben nämlich, etwa für $i = k = l = 1,\ m = 2$

(50*) $$e_{\dot{x}/2} - e_{\dot{y}/1} = e_{/2/\dot{x}} - e_{/1/\dot{y}}.$$

Für die linke Seite von (50*) erhalten wir durch Einsetzen aus (59), (61), (62) und (68)

(69) $$e_{/\dot{x}/2} - e_{/\dot{y}/1} = -4\frac{(eg - f^2)^{\frac{3}{2}}}{F^4}(\mathfrak{J}_{/1}\dot{x} + \mathfrak{J}_{/2}\dot{y})\dot{y}^2,$$

für die rechte aus (66), (67) wegen der Homogeneitätseigenschaft von τ

(70) $$e_{/2/\dot{x}} - e_{/1/\dot{y}} = \tau\cdot\dot{y}^2.$$

Durch Gleichsetzung folgt im Hinblick auf (38)

(71) $$\tau = F(F_{\dot{x}}\sigma - F_{\dot{y}}\varrho) = -4\frac{(eg - f^2)^{\frac{3}{2}}}{F^3}\left(\frac{d\mathfrak{J}}{ds}\right)_{\text{extremal}}.$$

Somit ergibt sich schließlich für die gesuchte Längenänderung

(72) $$\delta(l^2) = -4\frac{(eg - f^2)^{\frac{3}{2}}}{F^3}(\dot{y}\xi - \dot{x}\eta)^2\cdot(\dot{x}\delta y - \dot{y}\delta x)\cdot\left(\frac{d\mathfrak{J}}{ds}\right)_{\text{extremal}}$$
$$= -4\left(\frac{d\mathfrak{J}}{ds}\right)_{\text{extremal}}\cdot\Pi^2\cdot\bar{\Pi}.$$

Darin bedeutet $\Pi\,[\bar{\Pi}]$ den Flächeninhalt des von den Vektoren (x', y') und $(\xi, \eta)\,[(\delta x, \delta y)]$ im Punkte (x, y) aufgespannten Parallelogrammes in bezug auf das Linienelement (x, y, x', y'). Ist insbesondere $(\delta x, \delta y)$ das Element einer zur Kurve $(x = x(t), y = y(t))$ im Punkte (x, y) transversalen Kurve $(x = x(p), y = y(p))$ und wählt man den Parameter p auf dieser Kurve so, daß im Punkte (x, y) $\frac{dx}{dp} = h, \frac{dy}{dp} = k$ (Nr. 10), also $\delta x = h\,dp,\ \delta y = k\,dp$ ist, so folgt für $\xi = h,\ \eta = k$:

(72*) $$\delta(l^2) = +4\,dp\left(\frac{d\mathfrak{J}}{ds}\right)_{\text{extremal}}.$$

24. Bei paralleler Übertragung der Figur, die aus einem Vektor (ξ, η) im Punkte (x, y) und dem ausgezeichneten Linienelement $(dx = \dot{x}\,dt,\ dy = \dot{y}\,dt)$ dieses Punktes besteht, ändert sich im allgemeinen die Länge des Vektors in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement, wie (72) zeigt. Hieraus läßt sich schließen, daß man bei paralleler Herumführung dieser Figur um ein infinitesimales Parallelo-

gramm im allgemeinen mit einer anderen Länge in den Ausgangspunkt zurückkommt, d. h. daß eine *Streckenkrümmung* vorhanden ist. Wenn $(\delta x, \delta y)$ und $(\delta_1 x, \delta_1 y)$ die beiden Linienelemente im Punkte (x, y) sind, die das Parallelogramm aufspannen, so werden wir also zu erwarten haben, daß eine Gleichung der Gestalt gilt:

$$(73)\quad \delta_1\delta(l^2) - \delta\delta_1(l^2) = 4\,\frac{(eg-f^2)^{\frac{3}{2}}}{F^2}\,\mathfrak{S}(\xi\dot{y}-\eta\dot{x})^2(\delta x\,\delta_1 y - \delta y\,\delta_1 x),$$

wo $\mathfrak{S}$ ein Skalar ist, der von $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ abhängt und in $\dot{x}, \dot{y}$ homogen von nullter Dimension ist. Wir nennen $\mathfrak{S}$ den *Skalar der Streckenkrümmung* des allgemeinen Raumes. An (73) könnten wir noch eine ähnliche Bemerkung anschließen, wie wir soeben im Anschluß an (72) gemacht haben.

Den Wert von $\mathfrak{S}$ kann man nun auf zwei verschiedene Arten berechnen. Zunächst ist

$$(74)\quad \begin{aligned}&\delta_1\delta(l^2) - \delta\delta_1(l^2)\\ &= [(e_{/12}-e_{/21})\xi^2 + 2(f_{/12}-f_{/21})\xi\eta + (g_{/12}-g_{/21})\eta^2](\delta x\,\delta_1 y - \delta y\,\delta_1 x).\end{aligned}$$

Wenn man hierin für $e_{/12}$, $e_{/21}$ usf. die Werte einsetzt, die aus (66) folgen, (71) beachtet, und das auf diese Weise gefundene Ergebnis mit (73) vergleicht, so erhält man

$$(75)\quad \mathfrak{S} = \left(\frac{d^2\mathfrak{I}}{ds^2}\right)_{\text{extremal}}.$$

Andererseits kann man zur Berechnung der Differenzen $e_{/12} - e_{/21}$ usf. auch die Gleichung (52) heranziehen, die in unserem Falle wegen (53) die Gestalt annimmt

$$(52^*)\quad \begin{aligned}&(eg-f^2)_{/12} - (eg-f^2)_{/21}\\ &= 2\sqrt{eg-f^2}\left\{\frac{\partial(\mathfrak{K}\sqrt{eg-f^2})}{\partial\dot{x}}\,F F_{\dot{y}} - \frac{\partial(\mathfrak{K}\sqrt{eg-f^2})}{\partial\dot{y}}\,F F_{\dot{x}}\right\}.\end{aligned}$$

Wegen (66) und (68) gilt

$$(76)\quad \begin{cases} e_{/1} = \dfrac{\dot{y}^2}{F^2}(eg-f^2)_{/1}, & f_{/1} = -\dfrac{\dot{x}\dot{y}}{F^2}(eg-f^2)_{/1}, & g_{/1} = \dfrac{\dot{x}^2}{F^2}(eg-f^2)_{/1},\\ e_{/2} = \dfrac{\dot{y}^2}{F^2}(eg-f^2)_{/2}, & f_{/2} = -\dfrac{\dot{x}\dot{y}}{F^2}(eg-f^2)_{/2}, & g_{/2} = \dfrac{\dot{x}^2}{F^2}(eg-f^2)_{/2}, \end{cases}$$

so daß sich die Differenzen $e_{/12} - e_{/21}$ usf. auf (52*) zurückführen lassen, wobei (29) und (44) zu berücksichtigen sind. Man erhält so für $\delta_1\delta(l^2) - \delta\delta_1(l^2)$ einen Ausdruck, dessen Vergleichung mit (73) für den Skalar der Streckenkrümmung

$$(77)\quad \mathfrak{S} = \frac{1}{2F^2F_1}\left\{\frac{\partial(\mathfrak{K}\sqrt{eg-f^2})}{\partial\dot{x}}\,\frac{\partial F}{\partial\dot{y}} - \frac{\partial(\mathfrak{K}\sqrt{eg-f^2})}{\partial\dot{y}}\,\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}\right\}$$

ergibt.

Wenn man die Produktdifferentiationen rechts in (77) ausführt und (56), (60)—(62) benutzt, so erhält man zwischen den Skalaren $\mathfrak{K}, \mathfrak{A}, \mathfrak{J}, \mathfrak{S}$ die Beziehung

$$(78)\quad \mathfrak{A} = \mathfrak{K}\mathfrak{J} + \mathfrak{S}.$$

§ 4. Besondere Klassen von allgemeinen Räumen.

25. Wir untersuchen zunächst, ob und wie sich die *affinzusammenhängenden* zweidimensionalen allgemeinen Räume (Nr. 4) durch die in § 3 eingeführten Skalare charakterisieren lassen.

Ein affinzusammenhängender R_2 ist gekennzeichnet durch das identische Verschwinden sämtlicher dritten Ableitungen von φ und ψ nach $\dot{x}$ und $\dot{y}$, oder nach (65) durch $\varrho = \sigma = 0$. Diese Bedingungen können durch

$$\tau = F \cdot (\sigma F_{\dot{x}} - \varrho F_{\dot{y}}) = 0, \qquad \varrho\dot{x} + \sigma\dot{y} = 0 \tag{79}$$

ersetzt werden. Die erste Gleichung (79) ist nach (68) auch gleichbedeutend mit

$$(eg - f^2)_{/1} = 0 \quad (\text{oder } (eg - f^2)_{/2} = 0) \tag{80}$$

und nach (71) und (38) mit

$$\mathfrak{J}_{/1}\dot{x} + \mathfrak{J}_{/2}\dot{y} = 0. \tag{81}$$

Die zweite haben wir noch durch die Skalare aus § 3 auszudrücken, wobei wir die erste, also auch (80) und (81), als erfüllt ansehen dürfen. Dazu gehen wir aus von Gleichung (51), die sich, etwa für $l = m = 1$, wegen (65) in

$$(eg - f^2)_{\dot{x}/1} - (eg - f^2)_{/1\dot{x}} = -2\,\dot{y}^2(eg - f^2)(\varrho\dot{x} + \sigma\dot{y}) \tag{51*}$$

verwandelt. Nach (80) ist der Subtrahend auf der linken Seite von (51*) Null. Für den Minuenden ergibt sich aus (60) bei Berücksichtigung von (29), (44), (61), (62), (80)

$$(eg - f^2)_{\dot{x}/1} = -\dot{y}F^2\lambda_{/1} = -\frac{4(eg - f^2)^{\frac{3}{2}}}{F^2}\,\dot{y}\,\mathfrak{J}_{/1}. \tag{82}$$

Somit reduziert sich die zweite Gleichung (79) wegen (51*) auf $\mathfrak{J}_{/1} = 0$, und aus (81) folgt nunmehr:

Ein zweidimensionaler allgemeiner Raum ist dann und nur dann affinzusammenhängend, wenn für ihn identisch

$$\mathfrak{J}_{/1} = \mathfrak{J}_{/2} = 0 \tag{83}$$

ist.

26. Es sei nun zunächst der Krümmungsskalar $\mathfrak{K}$ unseres affinzusammenhängenden R_2 von Null verschieden. Dann gibt (83) $\mathfrak{J}_{/12} = \mathfrak{J}_{/21} = 0$ und (33**, § 3) — für $f = \mathfrak{J}$ —

$$\mathfrak{J}_{\dot{x}}F_{\dot{y}} - \mathfrak{J}_{\dot{y}}F_{\dot{x}} = 0. \tag{84}$$

Da $\mathfrak{J}$ von nullter Dimension homogen in $\dot{x}, \dot{y}$ ist, so folgt hieraus $\mathfrak{J}_{\dot{x}} = \mathfrak{J}_{\dot{y}} = 0$, und die Gleichungen (83) vereinfachen sich wegen (27*) zu $\mathfrak{J}_x = \mathfrak{J}_y = 0$. Somit ist

$$\mathfrak{J} = \text{konst.} \tag{85}$$

Jeder affinzusammenhängende R_2, dessen Krümmungsskalar von Null verschieden ist, hat also einen konstanten Hauptskalar.

Umgekehrt ist ein R_2 mit $\mathfrak{J} = $ konst. offenbar immer affinzusammenhängend.

Wegen der Invarianz von $\mathfrak{J}$ bei konformer Transformation (Nr. 22) geht ein solcher R_2 durch konforme Transformation wieder in einen affinzusammenhängenden R_2 mit demselben konstanten Hauptskalar über.

27. Die affinzusammenhängenden R_2 mit $\mathfrak{K} = 0$, also $K^1_{.12} = K^2_{.12} = 0$

(vgl. (53)) sind *euklidisch-affin* im Sinne von *H. Weyl* [1]), d. h. die durch (9) erklärte Vektorübertragung hängt nur vom Orte ab und ist integrabel. Nun können in einem euklidisch-affinen Raum die Komponenten des affinen Zusammenhanges — d. h. hier die $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^2}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}\partial \dot{y}}$, $\ldots$, $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \dot{y}^2}$ — durch eine Koordinatentransformation sämtlich zum Verschwinden gebracht werden [2]). Wenn wir also einen euklidisch-affinen R_2 von vornherein auf ein solches „lineares" Koordinatensystem beziehen, in dem die Komponenten des affinen Zusammenhanges alle Null sind, so sind auch φ und ψ (wegen ihrer Homogeneitätseigenschaft) Null. Die kovariante Ableitung nach dem Zeiger 1 (2) fällt daher mit der gewöhnlichen partiellen Ableitung nach $x(y)$ zusammen. Die Gleichungen (44) vereinfachen sich jetzt zu $F_x = F_y = 0$, und zeigen, daß F eine (bis auf die Regularitäts- und Homogeneitätsbedingungen) beliebige Funktion von $\dot{x}, \dot{y}$ allein ist. Also:

Die affinzusammenhängenden zweidimensionalen allgemeinen Räume, deren Krümmungsskalar beständig Null ist, sind identisch mit den Minkowskischen R_2, d. h. die Grundfunktion des zugehörigen Variationsproblemes kann durch eine Punkttransformation auf die Form $F(\dot{x}, \dot{y})$ gebracht werden [3]).

28. Aus den bisherigen Betrachtungen der §§ 3, 4 geht hervor, daß sich die wichtigsten Klassen von zweidimensionalen allgemeinen Räumen mit besonderen geometrischen Eigenschaften mit Hilfe des Skalars $\mathfrak{J}$ und seiner kovarianten Ableitungen kennzeichnen lassen. Unter geometrischen Eigenschaften verstehen wir dabei solche, welche gegenüber der Gruppe aller (etwa analytischen und) umkehrbaren Punkttransformationen mit positiver Funktionaldeterminante [4]) invariant sind.

Wir unterscheiden folgende *besondere Klassen von* R_2:

I. Die *Räume ohne Streckenkrümmung*, gekennzeichnet durch

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{J}}{ds^2}\right)_{\text{extremal}} = 0. \tag{86}$$

Da in ihnen und nur in ihnen $\mathfrak{K}\sqrt{eg - f^2}$ eine Ortsfunktion ist, wie aus (75), (77), (86) und der Homogeneitätseigenschaft von $\mathfrak{K}\sqrt{eg - f^2}$ folgt, so kann man sie auch definieren als *die* R_2, *in denen eine* (*nur vom Orte abhängige*) *Totalkrümmung* (*curvatura integra*)

$$T = \iint \mathfrak{K}\sqrt{eg - f^2}\, dx\, dy \tag{87}$$

existiert. (Vgl. auch Nr. 32.)

II. Die *Landsberg*schen *Räume*, d. h. diejenigen R_2, in denen die Länge eines beliebigen Vektors in bezug auf ein willkürliches Linienelement im gleichen Punkte bei simultaner Parallelverschiebung beider erhalten bleibt, wenn dabei das Linien-

---

[1]) Siehe Anm. [1]) S. 199, bes. S. 105.

[2]) Vgl. etwa *H. Weyl,* Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin 1923, bes. S. 22 f.

[3]) Ein entsprechender Satz gilt für allgemeine metrische Räume von beliebiger Dimensionenzahl. Vgl. Anm. [4]) S. 191, bes. S. 49.

[4]) Siehe Anm. [1]) S. 197.

element als ausgezeichnetes Linienelement (Nr. 3) betrachtet wird. Sie sind nach (72) durch

$$\left(\frac{d\mathfrak{J}}{ds}\right)_{\text{extremal}} = 0 \tag{88}$$

charakterisiert.

Wir haben diesen Räumen den Namen von *Landsberg* beigelegt, weil sie identisch sind mit den von *Landsberg* [1]) untersuchten R_2, in denen es *ein Gegenstück zum Gauß-Bonnet*schen *Integralsatz gibt.* (Siehe Nr. 30.)

III. Die *affinzusammenhängenden Räume*, gekennzeichnet durch

$$\mathfrak{J}_{/1} = \mathfrak{J}_{/2} = 0\,. \tag{83}$$

IV. Die *Gauß*schen *Räume*, die nach (59), (61), (62) durch

$$\mathfrak{J} = 0 \tag{89}$$

charakterisiert sind.

Jede dieser Klassen von zweidimensionalen allgemeinen Räumen ist in sämtlichen vorhergehenden als besonderer Fall enthalten.

29. Bisher ist kein Beispiel für einen *nicht affinzusammenhängenden Landsberg*schen Raum oder Raum ohne Streckenkrümmung bekannt. Alle *affinzusammenhängenden Räume* mit konstantem Hauptskalar $\mathfrak{J}$ werden in Nr. 38 bestimmt werden. Es sind die folgenden:

1. *Typus* [2]).

$$F = (L_0\dot{x} + M_0\dot{y})^{r_0}\,(L_1\dot{x} + M_1\dot{y})^{r_1}, \tag{a}$$

wo etwa L_0, M_0, L_1, M_1 Ortsfunktionen mit positiver Determinante ($L_0M_1 - L_1M_0 > 0$) sind und r_0, r_1 (reelle) Konstanten, die den Bedingungen

$$r_0 r_1 < 0\,, \quad r_0 + r_1 = 1 \tag{b}$$

genügen. Wir beschränken uns in jedem Punkte auf die Betrachtung der Wertesysteme $\dot{x}, \dot{y}$, für welche zugleich

$$L_0\dot{x} + M_0\dot{y} > 0\,, \quad L_1\dot{x} + M_1\dot{y} > 0\,. \tag{c}$$

Der Hauptskalar hat hier den Wert

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\,\frac{r_1 - r_0}{\sqrt{-r_0 r_1}}\,. \tag{d}$$

2. *Typus.*

$$F = \sqrt{(L_0\dot{x} + M_0\dot{y})^2 + (L_1\dot{x} + M_1\dot{y})^2}\cdot e^{k\,\operatorname{arctg}\frac{L_1\dot{x} + M_1\dot{y}}{L_0\dot{x} + M_0\dot{y}}}, \tag{e}$$

wo L_0, M_0, L_1, M_1 dieselbe Bedeutung haben, wie oben, und k eine Konstante ist. Die Wertsysteme $\dot{x}, \dot{y}$ mögen wieder durch (c) beschränkt sein. Hier ist der Hauptskalar

$$\mathfrak{J} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}\,. \tag{f}$$

---

[1]) a. a. O. Anm. [5]) S. 191, b) und c).

[2]) *G. Landsberg*, a. a. O. Anm. [5]) S. 191, c), bes. S. 334 f.

3. *Typus.*

$$(g) \qquad F = (L_0\dot{x} + M_0\dot{y})\, e^{\varepsilon \frac{L_1\dot{x} + M_1\dot{y}}{L_0\dot{x} + M_0\dot{y}}}, \quad (\varepsilon^2 = 1),$$

wo die gleichen Bezeichnungen und etwa auch Beschränkungen angewendet sind wie vorhin. Hier ist

$$(h) \qquad \Im = \varepsilon .$$

Es sei bemerkt, daß die bei *E. Nohel* [1]) auftretenden und später auch von *A. Maccone* [2]) untersuchten zweidimensionalen allgemeinen Räume, die eine dreigliedrige kontinuierliche Gruppe von Punkttransformationen zulassen, entweder *Gauß*sche Räume oder *Minkowski*sche Räume der Typen (a) und (g) sind. Diese Räume finden sich im Grunde genommen — allerdings ohne Angabe ihres Bogenelementes — schon bei *S. Lie* [3]). Dort tritt auch der entsprechende Raum des Typus (e) auf, der bei den beiden anderen Autoren nicht ausdrücklich vorkommt, weil diese im komplexen Gebiet arbeiten, und die Typen (a) und (e) im komplexen Gebiet nicht verschieden sind.

---

[1]) *E. Nohel*, Zur natürlichen Geometrie ebener Transformationsgruppen. Sitzungsber. Ak. Wien 123 (1914), Abt. IIa., S. 2085—2115, bes. die Gruppen 16, 20, 25.

[2]) *A. Maccone*, Le geometrie di Sophus Lie e le geometrie non pitagoriche in generale. Lincei Rend. Rom (5) 32I (1923), S. 327—331.

[3]) Siehe *S. Lie* und *F. Engel*, Theorie der Transformationsgruppen III, Leipzig 1893, S. 435 ff.

Der von Herrn Hofrat Dr. Dr.-Ing. *Alfred Ackermann-Teubner* in Leipzig im Jahre 1912 bei der Universität Leipzig errichtete „Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften“ ist in diesem Jahre durch das Preisgericht Herrn Professor Dr. *Wilhelm Blaschke* in Hamburg für sein Buch „Kreis und Kugel“ zuerkannt worden.

Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 und Leipzig
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 59533

Astronomischer Jahresbericht

Gegründet von

Walter F. Wislicenus

Mit Unterstützung der Astronomischen Gesellschaft

herausgegeben von dem

Astronomischen Rechen-Institut
zu Berlin-Dahlem

★

Bisher sind 27 Bände erschienen. Jährlich erscheint ein Band.
27. Band (Die Literatur des Jahres 1925) M. 24.—
Preise der früher erschienen Bände je nach Umfang.

★

Der Astronomische Jahresbericht faßt die zu einer Übersicht über sämtliche in den verschiedenen Kultursprachen neuerschienenen Arbeiten auf dem Gebiete der Astronomie und Astrophysik zusammen und berücksichtigt auch die auf den Gebieten der Geodäsie und nautischen Astronomie erscheinenden Publikationen weitgehendst und unterrichtet somit nicht nur allgemein über die Ergebnisse der Forschung, sondern weist auch im besonderen die auf einen bestimmten Gegenstand bezügliche Literatur in bequemer Anordnung nach. Bei den größeren Arbeiten wird durch kurze sachliche Referate der wesentliche Inhalt der Untersuchung wiedergegeben, und die gleichartigen Beobachtungen werden zu Sammelberichten zusammengefaßt.

Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 und Leipzig
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 59533

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik

Gegründet von

Karl Ohrtmann und **Felix Müller**

Fortgeführt von **Emil Lampe**

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von Dr. *H. Hahn*, o. Professor an der Universität Wien, Dr. *E. Hecke*, o. Professor an der Universität Hamburg, Dr. *Herglotz*, o. Professor an der Universität Leipzig, Dr. *O. Hölder*, Geh. Rat, o. Professor an der Universität Leipzig, Dr. *A. Loewy*, o. Professor an der Universität Freiburg i. B., Dr. *L. Neder*, o. Professor an der Universität Münster i. W., Dr. *O. Perron*, o. Professor an der Universität München, Dr. *E. Salkowski*, o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover, Dr. *G. Szegö*, o. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Dr. *A. Wangerin*, Geh. Reg.-Rat, o. Professor an der Universität Halle, Dr. *H. Weyl*, Professor an der Universität Zürich, herausgegeben von Dr. **Leon Lichtenstein,** o. Professor an der Universität Leipzig.

*

Bisher sind 47 Bände erschienen. Jährlich erscheint ein Band von etwa 6 Heften. Band 48 (Jahrgang 1921/22) Heft 1 bis 7 je M. 12.—

★

Das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" bringt eingehende Besprechungen sämtlicher periodischen und nichtperiodischen Neuerscheinungen auf dem Gebiete der reinen Mathematik, Mechanik, Relativitätstheorie, Astronomie und mathematischen Physik. Auch die Geschichte und Philosophie der Mathematik, wie die Fragen der Didaktik finden sorgfältige Berücksichtigung.

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schaefer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 156.

Heft 4.

Ausgegeben den 14. Juni.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1927

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 156. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Berwald, L., Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume II. Teil . Seite 211

Haußner, Robert. Über numerische Lösungen der Kongruenz $u^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ — 223

Remak, Robert, Über die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie . . . — 227

Baer, Reinhold, Kurventypen auf Flächen . . . . . — 231

Hoheisel, Guido, Über das Minimum von ganzen Funktionen . . . . . — 247

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume.

Von *L. Berwald* in Prag.

II. Teil.

§ 5. Zusammenhang mit den Untersuchungen von Landsberg.

30. Die bisherigen Entwicklungen setzen uns in den Stand, den Zusammenhang zu erörtern, in dem unsere Untersuchungen mit denen von *G. Landsberg* über die Krümmung in der Variationsrechnung stehen.

Landsberg führt zunächst für eine beliebige Kurve in einem R_2 eine absolute Differentialinvariante des Grundintegrales (1) gegenüber Punkt- und Parametertransformationen ein, die er die *extremale Krümmung* der Kurve im Punkte (x, y) nennt:

$$\frac{1}{R} = \frac{F_{x\dot{y}} - F_{y\dot{x}} + F_1(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})}{\sqrt{F^3 F_1}} \quad [1]. \tag{90}$$

Sodann sucht er durch Subtraktion eines vollständigen Differentiales von dem Differential $\frac{ds}{R}$ zu erreichen, daß die Differenz nur mehr von x, y und den ersten Differentialen dx, dy abhängt. Zu diesem Zwecke definiert *Landsberg* als *Winkel* Θ das Integral

$$\Theta = \int (\dot{x}\,d\dot{y} - \dot{y}\,d\dot{x}) \sqrt{\frac{F_1}{F}}\,, \tag{91}$$

wo bei festem (x, y) zu integrieren ist. Θ ist dann in $\dot{x}, \dot{y}$ homogen von nullter Dimension und nur bis auf eine additive Ortsfunktion bestimmt. Der Winkel zweier Richtungen $\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)_0 = q_0$ und $\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)_1 = q_1$ im Punkte (x, y) ist aber durch das von q_0 bis q_1 erstreckte Integral (91) eindeutig erklärt. Der Differentialausdruck

$$\frac{ds}{R} - d\Theta = S\,dt\,, \tag{92}$$

wo $d\Theta$ das vollständige Differential der durch (91) erklärten Funktion von $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ bedeutet, hängt dann nur noch von x, y, dx, dy ab.

---

[1]) Diese Differentialinvariante, die sich im *Gauß*schen Falle auf die *geodätische Krümmung* reduziert, wurde gleichzeitig auch von *A. L. Underhill*, a. a. O. Anm. [1]), S. 192 angegeben.

Landsberg beschränkt sich nun auf den Fall, daß $S\,dt$ ein *Pfaff*scher Ausdruck ist:

$$S\,dt = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\,. \tag{93}$$

In diesem Falle ist das über ein Gebiet $\mathfrak{G}$ erstreckte Flächenintegral

$$T = \iint_{\mathfrak{G}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy \tag{94}$$

nach dem *Green*schen Satze gleich dem Integrale

$$-\int_{\mathfrak{R}} (P\,dx + Q\,dy) = -\int_{\mathfrak{R}} S\,dt,$$

erstreckt über den Rand $\mathfrak{R}$ des Gebietes $\mathfrak{G}$. Durch Einsetzen des Wertes (92) für $S\,dt$ ergibt sich so folgende *Verallgemeinerung des Gauß-Bonnetschen Integralsatzes*

$$T + \int_{\mathfrak{R}} \frac{ds}{R} = \int_{\mathfrak{R}} d\Theta \quad ^{1}). \tag{95}$$

Das Flächenintegral T nennt *Landsberg* die *Totalkrümmung* oder *curvatura integra* von $\mathfrak{G}$. Wenn man zu Θ eine Ortsfunktion addiert, so vermindert sich $S\,dt$ nur um das vollständige Differential dieser Ortsfunktion und T bleibt daher ungeändert.

31. Wir haben nun anzugeben, wie sich die bei *Landsberg* auftretenden Größen durch die von uns eingeführten ausdrücken, und welche Bedeutung die von ihm eingeführte Beschränkung hat, daß $S\,dt$ ein *Pfaff*scher Ausdruck ist.

Zunächst folgt aus der Definition (91) des Winkels

$$\begin{cases} \Theta_{\dot{x}} = -\,\dot{y}\sqrt{\dfrac{F_1}{F}} = -\,\dot{y}\,\dfrac{\sqrt{eg-f^2}}{F^2}\,, \\ \Theta_{\dot{y}} = +\,\dot{x}\sqrt{\dfrac{F_1}{F}} = +\,\dot{x}\,\dfrac{\sqrt{eg-f^2}}{F^2}\,, \end{cases} \tag{96}$$

also

$$d\Theta = \left\{\dot{x}\Theta_x + \dot{y}\Theta_y + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\sqrt{\frac{F_1}{F}}\right\} dt. \tag{97}$$

Weiter ist nach (90) und (8)

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\frac{F_1}{F^3}}\,\{\dot{x}(\ddot{y}+\psi) - \dot{y}(\ddot{x}+\varphi)\}, \tag{90*}$$

so daß man hat

$$S\,dt = \frac{ds}{R} - d\Theta = -\,(\Theta_{/1}\dot{x} + \Theta_{/2}\dot{y})\,dt\,. \tag{98}$$

Die *Landsberg*sche Annahme läßt sich also folgendermaßen schreiben

$$\Theta_{/1}\dot{x} + \Theta_{/2}\dot{y} = -\,P(x,y)\dot{x} - Q(x,y)\dot{y}\,. \tag{99}$$

Da Θ und daher auch $\Theta_{/1}, \Theta_{/2}$ von nullter Dimension homogen in $\dot{x}, \dot{y}$ ist, so ergibt sich hieraus durch Differentiation nach $\dot{x}, \dot{y}$

---

[1]) Das rechts stehende Integral ist von *G. Landsberg* für Grundfunktionen F, die algebraisch von $\dot{x}, \dot{y}$ abhängen, eingehend diskutiert worden (a. a. O. Anm. [5]) c), S. 191, bes. S. 339 ff.).

$$(100)\qquad \begin{cases} \Theta_{/1} - (\Theta_{/1/\dot y} - \Theta_{/2/\dot x})\,\dot y = -P(x,y)\,, \\ \Theta_{/2} + (\Theta_{/1/\dot y} - \Theta_{/2/\dot x})\,\dot x = -Q(x,y)\,. \end{cases}$$

Nun ist aber nach (34*), (29), (44), (96)

$$(101)\qquad \begin{cases} \Theta_{/1/\dot x} = \Theta_{\dot x/1} = -\dfrac{\dot y}{F^2}(\sqrt{eg-f^2})_{/1}\,, \quad \Theta_{/2/\dot x} = \Theta_{\dot x/2} = -\dfrac{\dot y}{F^2}(\sqrt{eg-f^2})_{/2}\,, \\ \Theta_{/1/\dot y} = \Theta_{\dot y/1} = +\dfrac{\dot x}{F^2}(\sqrt{eg-f^2})_{/1}\,, \quad \Theta_{/2/\dot y} = \Theta_{\dot y/2} = +\dfrac{\dot x}{F^2}(\sqrt{eg-f^2})_{/2}\,, \end{cases}$$

also wegen (68), (71)

$$(101^*)\qquad \Theta_{/1/\dot y} = \Theta_{/2/\dot x} = 2F_1\dot x\dot y\Big(\frac{d\mathfrak{I}}{ds}\Big)_{\text{extremal}}\,.$$

Somit besagt gemäß (100) die Voraussetzung von *Landsberg* über den Differentialausdruck $S\,dt$, daß $\Theta_{/1}$, $\Theta_{/2}$ bloße Ortsfunktionen, ihre Ableitungen nach $\dot x, \dot y$ also Null sind. Diese Bedingungen reduzieren sich nach (101), (68), (71) auf die einzige

$$(88^*)\qquad \Big(\frac{d\mathfrak{I}}{ds}\Big)_{\text{extremal}} = 0\,.$$

Landsberg betrachtet demnach diejenigen R_2, die wir oben (Nr. 28) *nach ihm benannt haben.*

32. Es bietet jetzt keine Schwierigkeit, die *Landsberg*sche Totalkrümmung (94) durch die von uns eingeführten Größen auszudrücken.

Da P, Q nach (92), (93) die Komponenten eines kovarianten Vektors sind und nur vom Orte abhängen, so ergibt (30*) für $\xi_1 = P$, $\xi_2 = Q$, $i = 1$, $k = 2$:

$$(102)\qquad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = P_{/2} - Q_{/1} = -(\Theta_{/12} - \Theta_{/21})\,,$$

wenn wir P, Q durch ihre Werte (100) ersetzen und (101*) berücksichtigen. Aus § 3, (33**) und (96) folgt jetzt unmittelbar:

$$(102^*)\qquad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathfrak{K}\sqrt{F^3F_1} = \mathfrak{K}\sqrt{eg-f^2}\,.$$

*Die Landsberg*sche *Totalkrümmung T ist somit identisch mit dem in Nr.* 28 *ebenso genannten Flächenintegral.*

33. Im Anschluß an das Vorhergehende deuten wir noch kurz an, wie man auf dem von *Landsberg* eingeschlagenen Wege zum *Krümmungsskalar* $\mathfrak{K}$ auch dann gelangt, wenn (92) *kein Pfaffscher Ausdruck* ist. In diesem Falle ist $\int_{t_0}^{t} S\,dt$ das Grundintegral eines regulären Variationsproblems, d. h. die Funktion

$$S_1 = \frac{S_{\dot x\dot x}}{\dot y^2} = -\frac{S_{\dot x\dot y}}{\dot x\dot y} = \frac{S_{\dot y\dot y}}{\dot x^2}$$

ist nicht Null. Der Differentialausdruck

$$S_{y\dot x} - S_{x\dot y} - S_1(\dot x\ddot y - \dot y\ddot x)\,,$$

der gleich Null gesetzt die Differentialgleichung der Extremalen des Variationsproblemes gibt, hat den Transformationscharakter einer skalaren Dichte, und da $\sqrt{F^3F_1}$ den gleichen Transformationscharakter hat, so ist

$$\frac{S_{y\dot{x}} - S_{x\dot{y}} - S_1(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})}{\sqrt{F^3 F_1}}$$

ein Skalar. Setzen wir in ihm für $\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}$ den Wert, der sich aus der Differentialgleichung (5) der Extremalen des Variationsproblemes $\delta \int_{t_0}^{t} F\,dt = 0$ ergibt, so erhalten wir

$$\frac{S_{y\dot{x}} - S_{x\dot{y}} + S_1 \dfrac{F_{x\dot{y}} - F_{y\dot{x}}}{F_1}}{\sqrt{F^3 F_1}} = \frac{S_{\dot{x}/2} - S_{\dot{y}/1}}{\sqrt{F^3 F_1}},$$

und wenn wir hierin für S seinen Wert $-(\Theta_{/1}\dot{x} + \Theta_{/2}\dot{y})$ setzen, so folgt nach leichter Rechnung, bei der (101), (68), (33**), (96) zu berücksichtigen sind,

$$\frac{S_1(F_{x\dot{y}} - F_{y\dot{x}}) - F_1(S_{x\dot{y}} - S_{y\dot{x}})}{(FF_1)^{\frac{3}{2}}} = \mathfrak{R}. \tag{103}$$

Der *Landsberg*sche Fall ist in dem eben betrachteten enthalten, wenn man die Voraussetzung $S_1 \neq 0$ fallen läßt.

Das auseinandergesetzte Verfahren kann offenbar allgemein dazu dienen, aus einem Skalar S, der in $\dot{x}, \dot{y}$ von erster Dimension homogen ist, einen neuen zu bilden, der es von nullter Dimension ist. Die Voraussetzung der Homogeneität erster Dimension ist dabei noch unwesentlich. Denn wenn S_p einen in $\dot{x}, \dot{y}$ von p-ter Dimension homogenen Skalar bezeichnet, so ist $S_p F^{1-p}$ von erster Dimension homogen in $\dot{x}, \dot{y}$ [1]).

34. Wir schließen diesen Paragraphen mit einigen weiteren Bemerkungen über den Winkel von *Landsberg*, den Krümmungsskalar und die in § 3 eingeführten Skalare.

Der *Landsberg*sche Winkel Θ ist in $\dot{x}, \dot{y}$ von nullter Dimension homogen, also eine Funktion von x, y und $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ allein. Das gleiche gilt auch von den Skalaren $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$. Indem man umgekehrt $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ als Funktion von x, y und Θ auffaßt und diese Funktion für $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ in $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$ einsetzt, werden also diese Skalare Funktionen von x, y, Θ allein [2]).

Da nach (96)

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} = -\dot{y}\frac{\sqrt{eg - f^2}}{F^2}\frac{\partial}{\partial \Theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial \dot{y}} = +\dot{x}\frac{\sqrt{eg - f^2}}{F^2}\frac{\partial}{\partial \Theta}, \tag{96*}$$

[1]) Die in Nr. 33 gegebene Herleitung des Krümmungsskalars dürfte neu sein. Der Grundgedanke des angewandten Verfahrens findet sich schon bei *Th. de Donder*, Sur les invariants du calcul des variations; C. R. Paris 155 (1912), S. 577—580, wo indes nur die Invarianz gegenüber Punkttransformationen, nicht auch gegenüber Parametertransformationen betrachtet wird.

[2]) Wir bezeichnen diese Funktionen von x, y, Θ mit denselben Buchstaben, wie die Funktionen von $x, y, \dot{x}, \dot{y}$, aus denen sie auf die angegebene Weise entstanden sind. Da wir nur Differentiationen nach $\dot{x}, \dot{y}$ bezw. Θ betrachten, sind Zweideutigkeiten ausgeschlossen.

so ergibt (57)

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \Theta}.$$

Ebenso erhält man aus (60) und (62), bezw. aus (77)

$$(104)\quad \mathfrak{J} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\sqrt{eg-f^2}}{\partial \Theta}, \quad \mathfrak{S} = -\frac{1}{2\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial(\mathfrak{K}\sqrt{eg-f^2})}{\partial \Theta},$$

woraus sich insbesondere

$$(104^*)\qquad \sqrt{eg-f^2} = e^{2\int \mathfrak{J} d\Theta}$$

ergibt.

Für die R_2 ohne Streckenkrümmung (Nr. 28, I) *und nur für diese ist somit* $\mathfrak{K}e^{2\int \mathfrak{J} d\Theta}$ *Ortsfunktion. Speziell ist für jeden affinzusammenhängenden* R_2 entweder $\mathfrak{K} = 0$ oder $\mathfrak{J} =$ konst., und daher $\mathfrak{K}e^{2\mathfrak{J}\Theta}$ *Ortsfunktion.*

§ 6. Über eine Klasse von zweidimensionalen allgemeinen Räumen, in denen der Landsbergsche Winkel ohne Quadratur bestimmt werden kann.

35. Im folgenden beschäftigen wir uns mit denjenigen R_2, *für welche* $\sqrt{\frac{F}{F_1}}$ *eine quadratische Form in* $\dot{x}, \dot{y}$ *ist*:

$$(105)\qquad \sqrt{\frac{F}{F_1}} = \frac{F^2}{\sqrt{eg-f^2}} = \mathfrak{e}\dot{x}^2 + 2\mathfrak{f}\dot{x}\dot{y} + \mathfrak{g}\dot{y}^2, \quad (\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g} \text{ Ortsfunktionen}).$$

Dabei schränken wir gegebenenfalls die Betrachtung in jedem Punkte auf jene Wertesysteme $\dot{x}, \dot{y}$ ein, für welche $\mathfrak{e}\dot{x}^2 + 2\mathfrak{f}\dot{x}\dot{y} + \mathfrak{g}\dot{y}^2 > 0$. Der Ausdruck rechts in (105) hat gegenüber Punkttransformationen den Transformationscharakter des reziproken Wertes einer skalaren Dichte, so daß $\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2$ ein Skalar ist.

Wenn $\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 \gtrless 0$, so können wir setzen

$$(106)\qquad \mathfrak{e}\dot{x}^2 + 2\mathfrak{f}\dot{x}\dot{y} + \mathfrak{g}\dot{y}^2 = \sqrt{\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2}{\bar{e}\bar{g}-\bar{f}^2}}\,(\bar{e}\dot{x}^2 + 2\bar{f}\dot{x}\dot{y} + \bar{g}\dot{y}^2),$$

worin $\bar{e}dx^2 + 2\bar{f}dxdy + \bar{g}dy^2$ eine quadratische Differentialform mit nicht verschwindender Diskriminante bedeutet, die im Falle $\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 > 0$ positiv-definit, im Falle $\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 < 0$ indefinit ist. Wir denken uns diese (nicht eindeutig bestimmte) Differentialform nach Division durch dt^2 auf die Gestalt gebracht

$$(107^{\mathrm{I}})\qquad (\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 > 0): \quad \bar{e}\dot{x}^2 + 2\bar{f}\dot{x}\dot{y} + \bar{g}\dot{y}^2 = (L_0\dot{x} + M_0\dot{y})^2 + (L_1\dot{x} + M_1\dot{y})^2,$$

$$(107^{\mathrm{II}})\qquad (\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 < 0): \quad \bar{e}\dot{x}^2 + 2\bar{f}\dot{x}\dot{y} + \bar{g}\dot{y}^2 = (L_0\dot{x} + M_0\dot{y})(L_1\dot{x} + M_1\dot{y}).$$

Es ist dann

$$(\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 > 0): \quad \bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2 = (L_0M_1 - L_1M_0)^2,$$

$$(\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 < 0): \quad \bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2 = -\frac{1}{4}(L_0M_1 - L_1M_0)^2,$$

so daß $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ die Werte haben

$$(108^{\mathrm{I}}) \quad (\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2>0): \quad \mathfrak{e}=\frac{\sqrt{\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2}}{L_0M_1-L_1M_0}(L_0^2+L_1^2),$$

$$\mathfrak{f}=\frac{\sqrt{\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2}}{L_0M_1-L_1M_0}(L_0M_0+L_1M_1), \quad \mathfrak{g}=\frac{\sqrt{\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2}}{L_0M_1-L_1M_0}(M_0^2+M_1^2),$$

$$(108^{\mathrm{II}}) \quad (\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2<0): \quad \mathfrak{e}=\frac{\sqrt{\mathfrak{f}^2-\mathfrak{e}\mathfrak{g}}}{L_0M_1-L_1M_0}\cdot 2L_0L_1,$$

$$\mathfrak{f}=\frac{\sqrt{\mathfrak{f}^2-\mathfrak{e}\mathfrak{g}}}{L_0M_1-L_1M_0}(L_0M_1+L_1M_0), \quad \mathfrak{g}=\frac{\sqrt{\mathfrak{f}^2-\mathfrak{e}\mathfrak{g}}}{L_0M_1-L_1M_0}\cdot 2M_0M_1.$$

Im Falle $\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2=0$ setzen wir

$$(108^{\mathrm{III}}) \quad (\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2=0): \quad \mathfrak{e}=\frac{L_0^2}{L_0M_1-L_1M_0}, \quad \mathfrak{f}=\frac{L_0M_0}{L_0M_1-L_1M_0},$$

$$\mathfrak{g}=\frac{M_0^2}{L_0M_1-L_1M_0}.$$

In allen diesen Formeln bedeuten L_0, M_0, L_1, M_1 Ortsfunktionen mit positiver Determinante ($L_0M_1-L_1M_0>0$).

36. Der Winkel Θ von *Landsberg* bestimmt sich in unseren R_2 aus

$$(109) \quad \Theta_{\dot{x}}=-\frac{\dot{y}}{\mathfrak{e}\dot{x}^2+2\mathfrak{f}\dot{x}\dot{y}+\mathfrak{g}\dot{y}^2}, \qquad \Theta_{\dot{y}}=+\frac{\dot{x}}{\mathfrak{e}\dot{x}^2+2\mathfrak{f}\dot{x}\dot{y}+\mathfrak{g}\dot{y}^2}.$$

Durch Integration dieser Gleichungen und Einsetzen der Werte (108) für $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ erhält man, je nachdem $\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2 \gtreqless 0$, für Θ folgende Werte:

I. $\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2>0$.

$$(110^{\mathrm{I}}) \qquad \Theta=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2}}\operatorname{arctg}\left\{\frac{L_1\dot{x}+M_1\dot{y}}{L_0\dot{x}+M_0\dot{y}}\right\}+\psi(x,y);$$

II. $\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2<0$.

$$(110^{\mathrm{II}}) \qquad \Theta=\frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{f}^2-\mathfrak{e}\mathfrak{g}}}\log\left\{\frac{L_1\dot{x}+M_1\dot{y}}{L_0\dot{x}+M_0\dot{y}}\right\}+\psi(x,y);$$

III. $\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2=0$.

$$(110^{\mathrm{III}}) \qquad \Theta=\frac{L_1\dot{x}+M_1\dot{y}}{L_0\dot{x}+M_0\dot{y}}+\psi(x,y).$$

In (110) bedeutet ψ eine willkürliche Ortsfunktion.

Im Falle $\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2>0$ ist, abgesehen von einer additiven willkürlichen Ortsfunktion,

$$(111) \qquad \Theta=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2}}\Theta_0,$$

wo Θ_0 den Winkel von *Landsberg* für den *Gauß*schen R_2 mit der Grundfunktion

$$F=\sqrt{(L_0\dot{x}+M_0\dot{y})^2+(L_1\dot{x}+M_1\dot{y})^2}$$

bedeutet [1]).

37. Wir haben jetzt $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ wirklich zu berechnen und die in Rede stehenden Räume in invarianter Weise zu kennzeichnen.

---

[1]) Im Fall $\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2<0$ wäre der indefinite *Gauß*sche R_2 mit der Grundfunktion $F=\sqrt{(L_0\dot{x}+M_0\dot{y})(L_1\dot{x}+M_1\dot{y})}$ heranzuziehen. Über den Winkel in solchen indefiniten *Gauß*schen R_2 vgl. *G. Landsberg*, a. a. O. Anm. [5]) a) und c), S. 191, bes. S. 344 ff.

Aus (105) ergibt sich, wenn man halbiert, nach $\dot{x}$ und $\dot{y}$ differentiiert und (16) sowie (60)—(62) benutzt,

$$(112)\quad \mathfrak{e}\dot{x}+\mathfrak{f}\dot{y}=\frac{e\dot{x}+f\dot{y}}{\sqrt{eg-f^2}}+\Im\cdot\dot{y}\,;\qquad \mathfrak{f}\dot{x}+\mathfrak{g}\dot{y}=\frac{f\dot{x}+g\dot{y}}{\sqrt{eg-f^2}}-\Im\cdot\dot{x}\,.$$

Durch abermalige Differentiation nach $\dot{x}, \dot{y}$ erhält man

$$(113)\quad \begin{cases} \mathfrak{e}=\dfrac{e}{\sqrt{eg-f^2}}+2\Im\dfrac{e\dot{x}+f\dot{y}}{F^2}\,\dot{y}+\dfrac{\partial\Im}{\partial\dot{x}}\,\dot{y}\,, \\ \mathfrak{f}=\dfrac{f}{\sqrt{eg-f^2}}-2\Im\dfrac{e\dot{x}+f\dot{y}}{F^2}\,\dot{x}+\Im+\dfrac{\partial\Im}{\partial\dot{y}}\,\dot{y}\,, \\ \quad=\dfrac{f}{\sqrt{eg-f^2}}+2\Im\dfrac{f\dot{x}+g\dot{y}}{F^2}\,\dot{y}-\Im-\dfrac{\partial\Im}{\partial\dot{x}}\,\dot{x}\,, \\ \mathfrak{g}=\dfrac{g}{\sqrt{eg-f^2}}-2\Im\dfrac{f\dot{x}+g\dot{y}}{F^2}\,\dot{x}-\dfrac{\partial\Im}{\partial\dot{y}}\,\dot{x}\,, \end{cases}$$

woraus noch

$$(114)\quad \mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2=1-\Im^2-\frac{F(F_{\dot{x}}\Im_{\dot{y}}-F_{\dot{y}}\Im_{\dot{x}})}{\sqrt{eg-f^2}}=1-\Im^2-\frac{\partial\Im}{\partial\Theta}$$

folgt (vgl. Nr. 34).

Die Bedingungen $\dfrac{\partial\mathfrak{e}}{\partial\dot{x}}=\dfrac{\partial\mathfrak{e}}{\partial\dot{y}}=\ldots=\dfrac{\partial\mathfrak{g}}{\partial\dot{y}}=0$ reduzieren sich auf eine einzige, weil $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ in $\dot{x}, \dot{y}$ von nullter Dimension homogen und außerdem die zweiten Ableitungen einer und derselben Funktion nach $\dot{x}, \dot{y}$ sind. Diese Bedingung drückt auch aus, daß $\mathfrak{e}\mathfrak{g}-\mathfrak{f}^2$ von $\dot{x}, \dot{y}$ oder, was auf dasselbe herauskommt, von Θ unabhängig ist. Sie lautet

$$(115)\qquad \frac{\partial^2\Im}{\partial\Theta^2}+2\Im\frac{\partial\Im}{\partial\Theta}=0$$

oder in $\dot{x}, \dot{y}$ geschrieben

$$(115^*)\quad \frac{F^2}{eg-f^2}\left\{\frac{\partial^2\Im}{\partial\dot{x}^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{y}}\right)^2-2\,\frac{\partial^2\Im}{\partial\dot{x}\partial\dot{y}}\,\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}\,\frac{\partial F}{\partial\dot{y}}+\frac{\partial^2\Im}{\partial\dot{y}^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}\right)^2\right\}=0\,.$$

Genügt umgekehrt $\Im$ der Gleichung (115*), so sind die — jetzt durch (113) *definierten* — $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ Ortsfunktionen, und Multiplikation der Gleichungen (113) bezüglich mit $\dot{x}^2, \dot{x}\dot{y}, \dot{y}\dot{x}, \dot{y}^2$ sowie Addition ergibt (105).

Die betrachteten zweidimensionalen allgemeinen Räume sind somit durch (115) *oder* (115*) *in invarianter Weise gekennzeichnet.*

38. *Für jeden R_2 der in Rede stehenden Klasse läßt sich die Gestalt der Grundfunktion explizite angeben.*

Zunächst folgt nämlich aus (105)

$$(116^*)\qquad \log\left(\frac{F}{\sqrt{\mathfrak{e}\dot{x}^2+2\mathfrak{f}\dot{x}\dot{y}+\mathfrak{g}\dot{y}^2}}\right)=\frac{1}{2}\log\sqrt{eg-f^2}\,.$$

Die hier auftretenden Funktionen sind in $\dot{x}, \dot{y}$ von nullter Dimension homogen und lassen sich daher auch (Nr. 34) als Funktionen von x, y, Θ auffassen. Setzt

man in (116*) für den rechts stehenden Ausdruck seinen aus (104*) folgenden Wert, so ergibt sich

$$F = \sqrt{\mathfrak{e}\dot{x}^2 + 2\mathfrak{f}\dot{x}\dot{y} + \mathfrak{g}\dot{y}^2}\, e^{\int \mathfrak{J} d\Theta}. \tag{116}$$

Zur Bestimmung von $\mathfrak{J}$ als Funktion von Θ dient jetzt die Differentialgleichung (115), die in (114) bereits in einmal integrierter Gestalt vorliegt. Bei der weiteren Integration unterscheiden wir zwei Hauptfälle, je nachdem der Hauptskalar $\mathfrak{J}$ Ortsfunktion (also von Θ unabhängig) ist oder nicht.

Wenn $\mathfrak{J}$ Ortsfunktion ist, so vereinfacht sich (114) zu

$$\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 = 1 - \mathfrak{J}^2, \tag{117}$$

und wir haben entsprechend den drei Fällen von Nr. 35 zu unterscheiden, ob $\mathfrak{J}^2 \gtreqless 1$ ist. In (116) ist jetzt $\int \mathfrak{J} d\Theta = \mathfrak{J}\Theta$, wobei zu beachten ist, daß die willkürliche Ortsfunktion schon in Θ steckt. Wenn wir noch für $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \Theta$ ihre Werte aus (108), (110) einsetzen und die multiplikative willkürliche Ortsfunktion in L_0, M_0, L_1, M_1 hineingezogen denken, so erhalten wir

I. $\mathfrak{J}^2 < 1$

$$F = \sqrt{(L_0\dot{x} + M_0\dot{y})^2 + (L_1\dot{x} + M_1\dot{y})^2}\; e^{\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{1-\mathfrak{J}^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{L_1\dot{x} + M_1\dot{y}}{L_0\dot{x} + M_0\dot{y}}\right)}; \tag{118^{I}}$$

II. $\mathfrak{J}^2 > 1$

$$F = \sqrt{(L_0\dot{x} + M_0\dot{y})(L_1\dot{x} + M_1\dot{y})} \cdot \left(\frac{L_1\dot{x} + M_1\dot{y}}{L_0\dot{x} + M_0\dot{y}}\right)^{\frac{\mathfrak{J}}{2\sqrt{\mathfrak{J}^2-1}}}$$
$$= (L_0\dot{x} + M_0\dot{y})^{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{\mathfrak{J}^2-1}}\right)} \cdot (L_1\dot{x} + M_1\dot{y})^{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{\mathfrak{J}^2-1}}\right)}; \tag{118^{II}}$$

III. $\mathfrak{J}^2 = 1$

$$F = (L_0\dot{x} + M_0\dot{y})\, e^{\mathfrak{J}\frac{L_1\dot{x} + M_1\dot{y}}{L_0\dot{x} + M_0\dot{y}}}. \tag{118^{III}}$$

Alle allgemeinen zweidimensionalen Räume, deren Hauptskalar eine bloße Ortsfunktion ist, gehören also einem der Typen (118) *an. Insbesondere sind durch* (118) *mit* $\mathfrak{J} =$ konst. *alle affinzusammenhängenden* R_2 *mit konstantem Hauptskalar gegeben. Jeder affinzusammenhängende* R_2*, der kein Minkowskischer Raum ist, gehört notwendigerweise einem der drei Typen* (118) *mit* $\mathfrak{J} =$ konst. *an.*

Wenn zweitens $\mathfrak{J}$ keine Ortsfunktion ist, so sind bei der Integration von (114) die drei Fälle $\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 \gtreqless 1$ zu unterscheiden. Man erhält für $\mathfrak{J}$:

(119) A. $(\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 > 1)$: $\mathfrak{J} = -\sqrt{\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 - 1} \cdot \operatorname{tg}\left(\sqrt{\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 - 1} \cdot \Theta\right)$;

(120) B. $(\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 < 1)$: $\mathfrak{J} = \sqrt{1 - \mathfrak{e}\mathfrak{g} + \mathfrak{f}^2} \cdot \operatorname{cotgh}\left(\sqrt{1 - \mathfrak{e}\mathfrak{g} + \mathfrak{f}^2} \cdot \Theta\right)$;

(121) C. $(\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 = 1)$: $\mathfrak{J} = \dfrac{1}{\Theta}$.

Wenn man diese Werte in (116) einführt, $\int \mathfrak{J} d\Theta$ berechnet und schließlich wieder $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \Theta$ durch ihre Werte aus (108), (110) ersetzt, so ergibt sich das Resultat:

Jeder zweidimensionale allgemeine Raum der von uns betrachteten Klasse, dessen Hauptskalar keine Ortsfunktion ist, hat eine der folgenden Grundfunktionen:

A. $\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 > 1.$

$$(122\,\mathrm{A}) \qquad F = \sqrt{(L_0\dot{x} + M_0\dot{y})^2 + (L_1\dot{x} + M_1\dot{y})^2} \cdot \cos\left[\sqrt{\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 - 1}{\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{L_1\dot{x} + M_1\dot{y}}{L_0\dot{x} + M_0\dot{y}}\right) + \psi\right];$$

B. $\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 < 1.$

I. $\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 > 0.$

$$(122\,\mathrm{B\ I}) \qquad F = \sqrt{(L_0\dot{x} + M_0\dot{y})^2 + (L_1\dot{x} + M_1\dot{y})^2} \cdot \sinh\left[\sqrt{\frac{1 - \mathfrak{e}\mathfrak{g} + \mathfrak{f}^2}{\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{L_1\dot{x} + M_1\dot{y}}{L_0\dot{x} + M_0\dot{y}}\right) + \psi\right];$$

II. $\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 < 0.$

$$(122\,\mathrm{B\ II}) \qquad F = \frac{\psi\,(L_0\dot{x} + M_0\dot{y})^{\sqrt{\frac{1+\mathfrak{f}^2-\mathfrak{e}\mathfrak{g}}{\mathfrak{f}^2-\mathfrak{e}\mathfrak{g}}}} + \frac{1}{\psi}\,(L_1\dot{x} + M_1\dot{y})^{\sqrt{\frac{1+\mathfrak{f}^2-\mathfrak{e}\mathfrak{g}}{\mathfrak{f}^2-\mathfrak{e}\mathfrak{g}}}}}{[(L_0\dot{x} + M_0\dot{y})\,(L_1\dot{x} + M_1\dot{y})]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+\mathfrak{f}^2-\mathfrak{e}\mathfrak{g}}{\mathfrak{f}^2-\mathfrak{e}\mathfrak{g}}} - 1\right)};$$

III. $\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 = 0.$

$$(122\,\mathrm{B\ III}) \qquad F = (L_0\dot{x} + M_0\dot{y}) \cdot \sinh\left[\frac{L_1\dot{x} + M_1\dot{y}}{L_0\dot{x} + M_0\dot{y}} + \psi\right];$$

C. $\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 = 1.$

$$(122\,\mathrm{C}) \qquad F = \sqrt{(L_0\dot{x} + M_0\dot{y})^2 + (L_1\dot{x} + M_1\dot{y})^2} \cdot \left[\mathrm{arctg}\left(\frac{L_1\dot{x} + M_1\dot{y}}{L_0\dot{x} + M_0\dot{y}}\right) + \psi\right].$$

In diesen Formeln haben L_0, M_0, L_1, M_1 dieselbe Bedeutung wie in (108); $\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2$ sowie ψ sind beliebige (analytisch-reguläre) Ortsfunktionen.

Zu dem Typus (122 B II) gehört auch der R_2 mit der Grundfunktion

$$(\alpha) \qquad F = \frac{\beta\dot{x}^3 + \gamma\dot{y}^3}{\dot{x}\dot{y}}, \qquad (\beta,\ \gamma \text{ Ortsfunktionen};\ \beta\gamma \neq 0),$$

der in der projektiven Flächentheorie eine Rolle spielt [1]). Man erhält die Grundfunktion (α) aus (122 B II) für

$$(\beta) \qquad \mathfrak{e} = \mathfrak{g} = 0; \quad \mathfrak{f} = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad L_0 = M_1 \neq 0; \quad L_1 = M_0 = 0,$$

wenn noch

---

[1]) $\frac{1}{2}F$ ist das *projektive Linienelement* von *G. Fubini* für eine nicht geradlinige Fläche mit reellen Asymptotenlinien in Asymptotenparametern x, y; siehe etwa *G. Fubini-E. Čech*, Geometria proiettiva differenziale, I., Bologna 1926, S. 67.

Die mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ multiplizierte extremale Krümmung einer Kurve in bezug auf die Grundfunktion (α) hat Herr *E. Bompiani*, Costruzione di invarianti proiettivo-differenziali di una superficie. Lincei Rend. Rom (6), 2^{II} (1925), S. 466—470 die „*pangeodätische Krümmung*" der Kurve genannt und geometrisch gedeutet.

$$(\gamma) \qquad \psi L_0 = \beta\,, \quad \frac{1}{\psi} L_0 = \gamma$$

gesetzt wird. Der Hauptskalar hat hier den Wert

$$(\delta) \qquad \mathfrak{J} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\beta \dot{x}^3 - \gamma \dot{y}^3}{\beta \dot{x}^3 + \gamma \dot{y}^3}\,.$$

Der R_2 mit der Grundfunktion (α) besitzt im allgemeinen eine *Streckenkrümmung.*

39. Wir wenden uns nun wieder zu den R_2, deren Hauptskalar eine Ortsfunktion ist, und beweisen folgenden Satz:

Ein zweidimensionaler allgemeiner Raum, dessen Hauptskalar nur vom Orte abhängt, hat dann und nur dann keine Streckenkrümmung, wenn er affinzusammenhängend (sein Hauptskalar also konstant) ist.

Zum Beweise berechnen wir zunächst für den Fall, daß $\mathfrak{J}$ Ortsfunktion ist, die Funktionen $\sigma F_{\dot{x}} - \varrho F_{\dot{y}}$, $\varrho \dot{x} + \sigma \dot{y}$, deren gleichzeitiges identisches Verschwinden einen affinzusammenhängenden R_2 kennzeichnet. Dabei ist zu berücksichtigen, daß in diesem Falle

$$(123) \qquad \mathfrak{J}_{/1} = \mathfrak{J}_x\,, \quad \mathfrak{J}_{/2} = \mathfrak{J}_y$$

ist. Nach (71), (38) und (123) hat man dann

$$(124) \qquad \sigma F_{\dot{x}} - \varrho F_{\dot{y}} = -4 \frac{(eg - f^2)^{\frac{3}{2}}}{F^5} (\mathfrak{J}_x \dot{x} + \mathfrak{J}_y \dot{y})\,.$$

Schreibt man ferner (51*, § 4) in die Gestalt

$$(51^{**}) \qquad \left(\frac{F^2}{\sqrt{eg - f^2}}\right)_{\dot{x}/1} - \left(\frac{F^2}{\sqrt{eg - f^2}}\right)_{/1/\dot{x}} = \frac{F^2 \dot{y}^2}{\sqrt{eg - f^2}} (\varrho \dot{x} + \sigma \dot{y})$$

um, so findet man mittels (105), (112), (123) nach einiger Rechnung, bei der (60), (62), (68), (71) zu benutzen sind:

$$(125) \qquad \varrho \dot{x} + \sigma \dot{y} = 4 \frac{(eg - f^2)^{\frac{1}{2}}}{F^3} (\mathfrak{J}_x F_{\dot{y}} - \mathfrak{J}_y F_{\dot{x}})\,.$$

Jetzt gehen wir von der Bedingung (86) für einen Raum ohne Streckenkrümmung aus. Sie reduziert sich, weil $\mathfrak{J}$ Ortsfunktion ist, auf

$$(86^*) \qquad \mathfrak{J}_{xx} \dot{x}^2 + 2 \mathfrak{J}_{xy} \dot{x} \dot{y} + \mathfrak{J}_{yy} \dot{y}^2 - \mathfrak{J}_x \varphi - \mathfrak{J}_y \psi = 0\,.$$

Dreimalige Differentiation von (86), z. B. nach x, führt bei Beachtung von (65) zu

$$(126) \qquad \mathfrak{J}_x \sigma - \mathfrak{J}_y \varrho = 0\,.$$

Für $\mathfrak{J} =$ konst. ist (86*) identisch erfüllt. Wir zeigen jetzt, daß die Annahme, $\mathfrak{J}$ sei eine *nicht-konstante* Ortsfunktion, mit (126) und daher auch mit (86*) unvereinbar ist.

Bei dieser Annahme folgt nämlich aus (126)

$$(126^*) \qquad \varrho = p \mathfrak{J}_x\,, \quad \sigma = p \mathfrak{J}_y\,,$$

wo p eine Funktion von $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ bedeutet, die in $\dot{x}, \dot{y}$ von (-4)-ter Dimension homogen ist. Durch Einsetzen dieser Werte in (124), (125) ergibt sich

$$(124^*) \qquad p(\mathfrak{J}_x F_{\dot{y}} - \mathfrak{J}_y F_{\dot{x}}) = \frac{4(eg - f^2)^{\frac{3}{2}}}{F^5}(\mathfrak{J}_x \dot{x} + \mathfrak{J}_y \dot{y}),$$

$$(125^*) \qquad p(\mathfrak{J}_x \dot{x} + \mathfrak{J}_y \dot{y}) = \frac{4(eg - f^2)^{\frac{1}{2}}}{F^3}(\mathfrak{J}_x F_{\dot{y}} - \mathfrak{J}_y F_{\dot{x}}).$$

Hieraus erhält man zunächst

$$(127) \qquad p = \frac{4\varepsilon(eg - f^2)}{F^4}, \qquad (\varepsilon^2 = 1)$$

und weiter durch Einsetzen dieses Wertes in (124*) oder (125*)

$$\mathfrak{J}_x\left(\frac{FF_{\dot{y}}}{\sqrt{eg - f^2}} - \varepsilon\dot{x}\right) = \mathfrak{J}_y\left(\frac{FF_{\dot{x}}}{\sqrt{eg - f^2}} + \varepsilon\dot{y}\right)$$

oder wegen (112)

$$(128) \qquad \mathfrak{J}_x\{(\mathfrak{f} + \mathfrak{J} - \varepsilon)\dot{x} + \mathfrak{g}\dot{y}\} = \mathfrak{J}_y\{\mathfrak{e}\dot{x} + (\mathfrak{f} - \mathfrak{J} + \varepsilon)\dot{y}\}.$$

Da $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{J}$ Ortsfunktionen sind, kann (128) identisch in $\dot{x}, \dot{y}$ nur so bestehen, daß einzeln

$$(128^*) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{J}_x \mathfrak{g} = \mathfrak{J}_y(\mathfrak{f} - \mathfrak{J} + \varepsilon) \\ \mathfrak{J}_x(\mathfrak{f} + \mathfrak{J} - \varepsilon) = \mathfrak{J}_y \mathfrak{e} \end{array}\right\}$$

ist, und hieraus folgt, da nach Annahme $\mathfrak{J}_x, \mathfrak{J}_y$ nicht beide Null sind:

$$(129) \qquad \mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 + (\mathfrak{J} - \varepsilon)^2 = 0$$

oder wegen (117)

$$(129^*) \qquad \mathfrak{J} = \varepsilon,$$

was der gemachten Annahme widerspricht, daß $\mathfrak{J}$ eine nicht-konstante Ortsfunktion ist. Somit ist notwendigerweise $\mathfrak{J} = \text{konst.}$, w. z. b. w.

40. Mit dem soeben bewiesenen Satze verwandt ist folgende Kennzeichnung der affinzusammenhängenden Räume mit $\mathfrak{K} \neq 0$:

Die affinzusammenhängenden Räume, die keine Minkowskischen Räume sind, sind die einzigen zweidimensionalen allgemeinen Räume mit $\mathfrak{K} \neq 0$, deren Krümmungstensor nur vom Orte abhängt und deren Streckenkrümmung zugleich identisch verschwindet.

Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß wegen $\mathfrak{K} \neq 0$ nach (53) und (13) der Krümmungstensor dann und nur dann vom Orte allein abhängt, wenn der Grundtensor der Krümmung linear in $\dot{x}, \dot{y}$ ist. Wegen (54) ist dann $\mathfrak{K}F^2$ *eine quadratische Form in* $\dot{x}, \dot{y}$. Andererseits ist das identische Verschwinden der Streckenkrümmung gleichbedeutend damit (Nr. 28, I.), daß $\mathfrak{K}\sqrt{eg - f^2}$ *Ortsfunktion* ist. Division beider Ergebnisse führt zu (105). Die gesuchten Räume gehören also zu der in diesem Paragraphen betrachteten Klasse. Daher folgt aus (53) und (112)

$$(130)\qquad \begin{cases} K^1_{\cdot 12} = -(\mathfrak{K}\sqrt{eg-f^2})\dfrac{f\dot{x}+g\dot{y}}{\sqrt{eg-f^2}} = -(\mathfrak{K}\sqrt{eg-f^2})\{(\mathfrak{f}+\mathfrak{J})\dot{x}+\mathfrak{g}\dot{y}\}, \\ K^2_{\cdot 12} = +(\mathfrak{K}\sqrt{eg-f^2})\dfrac{e\dot{x}+f\dot{y}}{\sqrt{eg-f^2}} = +(\mathfrak{K}\sqrt{eg-f^2})\{\mathfrak{e}\dot{x}+(\mathfrak{f}-\mathfrak{J})\dot{y}\}. \end{cases}$$

Die rechte Seite ist dann und nur dann linear in $\dot{x}, \dot{y}$, wenn $\mathfrak{J}$ Ortsfunktion ist. Die gesuchten Räume sind demnach identisch mit denjenigen R_2 ohne Streckenkrümmung, deren Hauptskalar eine Ortsfunktion und deren Krümmungsskalar von Null verschieden ist. Die beiden ersten Eigenschaften kennzeichnen nach Nr. 39 die affinzusammenhängenden Räume mit konstantem Hauptskalar, die letzte schließt die *Minkowski*schen Räume aus.

Prag, am 29. Juni 1926.

Über numerische Lösungen der Kongruenz $u^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$.

Von *Robert Haußner* in Jena.

Durch Untersuchungen über die Kongruenz

$$u^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$$

wurde ich zu der Vermutung geführt, daß $u = 2$ nur dann eine Wurzel dieser Kongruenz sein kann, wenn p eine Primzahl von einer bestimmten Form ist. Um diese Vermutung auf ihre Richtigkeit zu prüfen, berechnete ich die Reste von $2^{p-1} - 1$ für die zwischen 2000 und 5000 gelegenen Primzahlen dieser Form, deren es nur 10 gibt. Für eine einzige von ihnen, nämlich

$$p = 3511$$

ergibt sich der Rest Null. Nun ließ ich durch zwei geübte Rechner die Reste von $2^{p-1} - 1$ modulo p^2 für *alle* Primzahlen bis 10000 berechnen. Für keine weitere Primzahl als 3511 ergab sich der Rest Null, was immerhin eine gewisse Stütze für meine Vermutung darstellt.

Die Tafel der berechneten Reste ist in dem *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab* (Oslo), Bd. 39, Nr. 2, 1925 abgedruckt und enthält für alle Primzahlen des angegebenen Intervalles die Zahlen $\tau = \frac{p-1}{t}$, wo t den Exponenten bezeichnet, zu dem die Zahl 2 (mod p^x) gehört, die Reste λ des Quotienten $\frac{2_t - 1}{p} \pmod{p}$ und die Reste $W \equiv \tau\lambda$ von $\frac{2^{p-1} - 1}{p} \pmod{p}$. Die in meiner Tafel benutzten Bezeichnungen sind die von Herrn *W. Meißner*, der die erste Primzahl $p = 1093$ mit dem Reste $W = 0$ gefunden und die Reste W für alle Primzahlen bis 2000 veröffentlicht hatte [1]).

Bald nach der Veröffentlichung meiner Tafel erschien eine ähnliche von Herrn *Beeger* [2]), die alle Primzahlen von 5000 bis 14000 umfaßt, aber nur die Reste λ angibt. Durch sie wurde ich erst auf eine früher erschienene, mir aber unbekannt

[1]) Sitzungsber. d. Königl. Preuß. Akad. d. Wiss. Bd. 35, S. 663 (1913).

[2]) Messenger of Mathematics, Bd. 55, S. 17—24 (1925).

gebliebene Tafel desselben Verfassers für alle Primzahlen zwischen 2000 und 5000 aufmerksam[1]). Die besondere Bedeutung von $p = 3511$ ist demnach von *Beeger* vor mir veröffentlicht, während sie ungefähr gleichzeitig von uns Beiden gefunden ist.

Herr *Meißner* teilt eine sehr elegante Verifikation der Kongruenz

$$2^{1092} \equiv 1 \pmod{1093^2}$$

mit, die aber sich nicht verallgemeinern läßt, da sie auf besonderen Kunstgriffen beruht. Das folgende Verfahren ist von solchen Kunstgriffen frei und hat den Vorzug nicht nur für jede Primzahl anwendbar zu sein, sondern auch leicht die Reste von $u^{p-1} - 1 \pmod{p^2}$ für beliebige Werte von u zu liefern. Setzt man

$$u^{p-1} \equiv 1 + p \cdot q_u \pmod{p^2}, \tag{1}$$

so gelten bekanntlich für beliebige ganze Zahlen a, b, z die von *Eisenstein* zuerst aufgestellten Kongruenzen

$$\left.\begin{aligned} q_{a \cdot b} &\equiv q_a + q_b, && (2)\\ q_{a^z} &\equiv z \cdot q_a, && (3)\\ q_{a+pz} &\equiv q_a - \frac{z}{a} && (4) \end{aligned}\right\} \pmod{p}.$$

q_2 ist also mit W in meiner Tafel identisch.

Als Ausgangspunkt wählt man dann irgendein Gleichungensystem, z. B.

$$p - r = s \quad \begin{pmatrix} r = & 1, & 2, \ldots, \frac{p-1}{2} \\ s = p-1, & p-2, & \ldots, \frac{p+1}{2} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

das meistens mit den kleinsten Zahlen zu rechnen gestatten wird. Aus ihm folgen nach (4) die Kongruenzen

$$q_r + \frac{1}{r} \equiv q_s \pmod{p}. \tag{6}$$

Die Zahlen r und s zerlegt man weiter mit Hilfe einer Faktorentafel in ihre Primfaktoren $r', r'', \ldots; s', s'', \ldots$ und benutzt noch die Kongruenzen (2) und (3), um q_r und q_s weiter zu zerlegen. Aus den Kongruenzen (6) kann man dann stets, wie *Arwin* [2]) gezeigt hat, ein System von m linear unabhängigen Kongruenzen auswählen, in denen nur die m ersten Primzahlen vorkommen, und die zugehörigen Reste q berechnen. Will man für weitere Primzahlen die Reste q erhalten, so hat man noch weitere passend gewählte Kongruenzen (6) zu benutzen.

So nimmt man für $p = 1093$

r:	$4 = 2^2$	$15 = 3 \cdot 5$	$64 = 2^6$	$121 = 11^2$	$125 = 5^3$
s:	$3^2 \cdot 11^2$	$2 \cdot 7^2 \cdot 11$	$3 \cdot 7^3$	$2^2 \cdot 3^5$	$2^3 \cdot 11^2$

---

[1]) Messenger of Mathematics, Bd. 51. S. 149—150 (1922).

[2]) *Die Kongruenz* $(\lambda+1)^p - \lambda^p - 1 \equiv 0 \pmod{p^\nu}$ *und die Natur ihrer Lösungen.* Lunds Universitets Årsskrift. N. F. Ard. 2. Bd. 17. Nr. 2. Von der Beschränkung, daß die ersten m Primzahlen für die Bildung des Kongruenzensystems genommen werden, kann man sich frei machen, und andere den zu berechnenden Resten entsprechend gewählte Primzahlen nehmen, wodurch die Rechnung oft wesentlich gekürzt werden kann.

und erhält die $m=5$ Kongruenzen (mod 1093):

$$\begin{aligned}
-2q_2+2q_3 \qquad\qquad +2q_{11} &\equiv \tfrac{1}{4} \equiv -273\\
q_2-q_3-q_5+2q_7+q_{11} &\equiv \tfrac{1}{15} \equiv -510\\
-6q_2+q_3 \qquad +3q_7 \qquad &\equiv \tfrac{1}{64} \equiv -222\\
2q_2+5q_3 \qquad\qquad -2q_{11} &\equiv \tfrac{1}{121} \equiv 271\\
3q_2 \qquad -3q_5 \qquad +2q_{11} &\equiv \tfrac{1}{125} \equiv 376\,,
\end{aligned}$$

die

$$q_2\equiv 0\,,\quad q_3\equiv 312\,,\quad q_5\equiv 1033\,,\quad q_7\equiv 915\,,\quad q_{11}\equiv 98$$

liefern.

Durch Addition der ersten und vierten Kongruenz folgt die Kongruenz

$$7q_3\equiv -2\,,$$

oder rückwärts die Gleichung

$$3^7=2p+1\,,$$

die *Salié* [1]) mit zum Ausgangspunkte genommen hat. Ist sie auch einfach, so ist sie doch nur durch Probieren zu finden, während die durchgehende Benutzung von (5) bzw. (6) ein systematisches Vorgehen ermöglicht.

Will man z. B. noch q_{17} berechnen, so braucht man nur zu beachten, daß in (5) für $r=5$, $s=2^6\cdot 17$ ist, und demnach die Kongruenz

$$6q_2+q_{17}\equiv q_5+\tfrac{1}{5} \quad\text{oder}\quad q_{17}\equiv q_5+656$$

$q_{17}\equiv 596$ liefert.

Für $p\equiv 3511$ läßt sich $q_2\equiv 0$ am leichtesten verifizieren, wenn man

$r=1$	11	$55=5\cdot 11$	$81=3^4$	$91=7\cdot 13$	$136=2^3\cdot 17$	$196=2^2\cdot 7^2$	$247=13\cdot 19$
also $\frac{1}{r}\equiv$	1596	-383	1127	463	1265	-412	-199
$s=2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 13$	$2^2\cdot 5^3\cdot 7$	$2^7\cdot 3^2$	$2\cdot 5\cdot 7^3$	$2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 19$	$3^3\cdot 5^3$	$3\cdot 5\cdot 13\cdot 17$	$2^6\cdot 3\cdot 17$

wählt. Die hieraus sich ergebenden acht Kongruenzen liefern für

$a=2$	3	5	7	11	13	17	19
$q_a\equiv 0$	7	1398	3430	2517	2093	2950	1063.

Trotzdem also für $p=1093$ und $p=3511$ das *Wieferich*sche Kriterium erfüllt ist, ist die *Fermat*sche Gleichung

$$x^p+y^p+z^p=0$$

in ganzen nicht durch p teilbaren Zahlen unlösbar, weil die weiteren notwendigen Bedingungen von *Mirimanoff*, *Frobenius* und *Vandiver*

$$q_3\equiv 0\,,\quad q_5\equiv 0\,,\quad q_{11}\equiv 0\,,\quad q_{17}\equiv 0 \pmod{p}$$

nicht erfüllt sind. Diese *Fermat*sche Behauptung ist also richtig für alle Primzahlen kleiner als 14000.

---

[1]) Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 34, S. 248.

Bekanntlich hat *Abel* zuerst die Frage aufgeworfen, ob und für welche Primzahlen p der Rest q_u in der Kongruenz (1) verschwinden könne, wenn $u < p$ ist. *Jacobi* gab auf diese Frage die Antwort, daß für alle Primzahlen $p \leqq 37$ nur für $p = 11$, $u = 3$ oder 9, für $p = 29$, $u = 14$ und für $p = 37$, $u = 18$ der Rest q_u verschwindet. Seitdem sind über den Rest von $\dfrac{u^{p-1}-1}{p} \pmod{p}$ viele Veröffentlichungen erschienen, so daß *Dickson* dieser Frage in seiner *History of the theory of numbers* ein besonderes Kapitel [1]) gewidmet hat, in der er über die bis 1918 erschienenen Arbeiten — dem Plane seines Werkes entsprechend — rein chronologisch referiert. Die Dissertation von *G. Dittrich* [2]) gibt eine zusammenhängende Darstellung monographischen Charakters aller Arbeiten bis 1924 vom historisch-kritischen Standpunkt aus und berücksichtigt auch verschiedene Anwendungen. Da aber weder bei *Dickson*, noch bei *Dittrich* sich alle bis jetzt bekannten Fälle finden, in denen die Kongruenz $u^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ Lösungen $u < p$ besitzt, so füge ich eine Tafel derselben hier an.

p	u	p	u	p	u
11	3,9	131	58,111	241	94
29	14	137	19	257	48
37	18	151	78	263	79
43	19	163	65,84	269	171, 180, 207
59	53	181	78	281	20
71	11,26	191	176	283	147
79	31	197	143	293	91
97	53	199	174	331	18, 71, 324
103	43	211	165,182	353	14, 196
109	96	213	69	487	10, 100
113	68	229	44,209	673	22, 484
127	38,62	233	33	1093	2^ν ($\nu = 1, 2, \ldots, 10$)
				3511	2^ν ($\nu = 1, 2, \ldots, 11$)

[1]) Bd. 1, Kap. IV. S. 105—112. Washington, 1919.

[2]) *Die Theorie des Fermatquotienten*, Jena, 1924. Die Arbeit ist nicht gedruckt, sondern nur in Abschrift auf der Universitäts-Bibliothek zu Jena hinterlegt.

Über die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie.

Von *Robert Remak* in Berlin.

Eine stetige reelle Funktion in einem zusammenhängenden Gebiete der Ebene heiße potentialkonvex, wenn sie im Innern eines jeden Kreises, der ganz im Innern des Gebietes liegt, größer oder gleich dem *Poisson*schen Integral über ihre Werte auf dem Rande des Kreises ist. Eine negativ genommene potentialkonvexe Funktion heiße potentialkonkav.

Nach Herrn *Perron* [1]) heißt eine potentialkonvexe Funktion in einem beschränkten Gebiete, die mit Einschluß des Randes stetig und auf dem Rande größer oder gleich vorgegebenen Randwerten ist, eine Oberfunktion, ebenso eine potentialkonkave Funktion, die auf dem Rande kleiner oder gleich den vorgegebenen Randwerten ist, eine Unterfunktion.

Jede Konstante, die größer ist als die vorgegebenen Randwerte f, ist bereits eine Oberfunktion, ebenso jede Konstante, die kleiner ist als f, eine Unterfunktion. Jede Differenz — Oberfunktion minus Unterfunktion — ist potentialkonvex und $\geqq 0$ auf dem Rande; sowie also der weiter unten aufgeführte Hilfssatz 3 bewiesen ist, weiß man, daß die Differenz $\geqq 0$ im ganzen Gebiete, daß also jede Oberfunktion überall größer oder gleich jeder Unterfunktion ist. Die Oberfunktionen $\psi(\mathfrak{x})$ besitzen also in jedem Punkte $\mathfrak{x}$ eine endliche untere Grenze $u(\mathfrak{x})$. Herr *Perron* beweist nun, daß $u(\mathfrak{x})$ die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie löst, d. h. unter sehr allgemeinen Voraussetzungen sich an die gegebenen Randwerte anschließt und im Innern des Gebietes harmonisch ist, d. h. der Bedingung $\Delta u = 0$ genügt. In bezug auf die Behandlung des Randes folgen wir völlig Herrn *Perron* und verweisen auf seine Arbeit. Wir beschäftigen uns hier nur mit der Behauptung, daß $u(\mathfrak{x})$ harmonisch ist. Herr *Perron* benutzte zu ihrem Beweise Hilfsmittel aus der *Lebesgue*schen Theorie. Mir gelang es [2]), ohne diese auszukommen, jedoch erforderte mein damaliger Beweis noch feineres Eingehen auf die bei der Definition der *Riemann*schen Integrale benutzten Summen. Im folgenden will ich einen kurzen und völlig elementaren Beweis dieser Behauptung geben [3]).

Es werden drei Hilfssätze [4]) benutzt:

---

[1]) Math. Zeitschr. Bd. 18, S. 42—54.

[2]) Math. Zeitschr. Bd. 20, S. 126—130.

[3]) Der Beweis der Herren *T. Radó* und *F. Riesz* (Math. Zeitschr. Bd. 22) arbeitet wesentlich mit unendlichen Folgen von Funktionen. Ich benutze nur den Begriff der unteren Grenze und habe die Verwendung unendlicher Reihen völlig vermieden.

[4]) *Perron* l. c. S. 44—46.

Hilfssatz 1: *Das Minimum von endlich vielen Oberfunktionen ist eine Oberfunktion.*

Hilfssatz 2: *Eine Oberfunktion behält ihre Eigenschaft, wenn man sie in einem Kreise im Innern des Gebietes durch das Poissonsche Integral über ihre Werte auf seinem Rande ersetzt.*

Hilfssatz 3: *Eine potentialkonvexe Funktion kann kein Minimum im Innern eines abgeschlossenen Gebietes annehmen.* (Schluß von § 1 der *Perron*schen Arbeit.)

Es sei $\mathfrak{x}$ ein Punkt im Innern des Gebietes, K ein Kreis im Innern des Gebietes, der $\mathfrak{x}$ in seinem Innern enthält, ψ eine beliebige Oberfunktion, u die untere Grenze aller ψ; $M_K\psi$ sei innerhalb K das *Poisson*sche Integral über die Werte von ψ, die es auf dem Rande von K annimmt. Außerhalb des Kreises K und auf seinem Rande sei $M_K\psi = \psi$. Nach der Definition der potentialkonvexen Funktion ist $\psi \geqq M_K\psi$. Also ist die untere Grenze u aller ψ größer oder gleich der unteren Grenze aller $M_K\psi$; da aber die Werte $M_K\psi(\mathfrak{x})$ nach Hilfssatz 2 unter den Werten $\psi(\mathfrak{x})$ vorkommen, so ist $u(\mathfrak{x})$ gleich der unteren Grenze der $M_K\psi(\mathfrak{x})$.

Unser nächstes Ziel ist es, zu zeigen, daß $u(\mathfrak{x})$ stetig ist.

Es ist ausführlicher

$$(1) \qquad M_K\psi(\mathfrak{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_K \psi(\mathfrak{k})\, P(\mathfrak{k}, \mathfrak{x})\, d\vartheta .$$

Es sei $\mathfrak{x}_0$ der Mittelpunkt des Kreises K, sein Radius r, $\mathfrak{k}$ bedeute einen Punkt auf der Peripherie von K, also $|\mathfrak{k} - \mathfrak{x}_0| = r$. ϑ sei sein Winkelargument, $P(\mathfrak{k}, \mathfrak{x})$ sei die bekannte Funktion des *Poisson*schen Integrals, von der wir nur zu wissen brauchen, daß sie in $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{x}$ stetig ist und positiv, so lange $\mathfrak{x}$ im Innern des Kreises gelegen ist. Es sei $\varrho < 1$ eine feste Zahl; wenn wir $\mathfrak{x}$ auf einen kleineren konzentrischen Kreis K'

$$(2) \qquad |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| \leqq \varrho r$$

beschränken, so besitzt $P(\mathfrak{k}, \mathfrak{x})$ in diesem abgeschlossenen Bereich ein Maximum, das wir G nennen wollen [1]). Es sei ψ_0 eine feste Oberfunktion, ψ sei eine beliebige Oberfunktion. Man setze zur Abkürzung

$$\psi_1 = \mathrm{Min}\,(\psi_0, \psi),$$

dann ist nach Hilfssatz 1 auch ψ_1 eine Oberfunktion und $\psi_1 \leqq \psi_0$, also auch

$$(3) \qquad M_K\psi_1 \leqq M_K\psi_0 .$$

Im Bereich (2) ist

---

[1]) Setzt man $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| = \sigma r$, so ist im abgeschlossenen Gebiete $\sigma \leqq \varrho$; es ist

$$P(\mathfrak{k}, \mathfrak{x}) = \frac{r^2 - |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0|^2}{|\mathfrak{k} - \mathfrak{x}|^2} = \frac{r^2 - |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0|^2}{|(\mathfrak{k} - \mathfrak{x}_0) - (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)|^2} \leqq \frac{r^2 - r^2\sigma^2}{(r - r\sigma)^2} = \frac{1 - \sigma^2}{(1 - \sigma)^2} = \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}$$

$$= -1 + \frac{2}{1 - \sigma} \leqq -1 + \frac{2}{1 - \varrho} = \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} = G;$$

also hängt G in Wirklichkeit nur von ϱ und nicht von r ab, worauf es aber im folgenden nicht ankommt.

$$(4)\quad \begin{cases} M_K\psi_0(\mathfrak{x}) - M_K\psi_1(\mathfrak{x}) = M_K(\psi_0(\mathfrak{x}) - \psi_1(\mathfrak{x})) \\ = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_K (\psi_0(\mathfrak{k}) - \psi_1(\mathfrak{k}))\, P(\mathfrak{k}, \mathfrak{x})\, d\vartheta \leqq G\,\frac{1}{2\pi}\int_K (\psi_0(\mathfrak{k}) - \psi_1(\mathfrak{k}))\, d\vartheta \\ = G(M_K\psi_0(\mathfrak{x}_0) - M_K\psi_1(\mathfrak{x}_0)) \leqq G(M_K\psi_0(\mathfrak{x}_0) - u(\mathfrak{x}_0)) \quad [1]). \end{cases}$$

Es ist u auch die untere Grenze aller Min (ψ, ψ_0), d. h. aller ψ_1; also ist die untere Grenze der $M_K\psi_1 \leqq u$; da aber die $M_K\psi_1$ unter den ψ vorkommen, ist auch die untere Grenze der $M_K\psi_1$ gleich u. Man erhält also

$$(5)\qquad M_K\psi_0(\mathfrak{x}) - u(\mathfrak{x}) \leqq G(M_K\psi_0(\mathfrak{x}_0) - u(\mathfrak{x}_0)).$$

Nach Vorgabe eines beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ kann man, da u auch untere Grenze der Funktionen $M_K\psi$ ist, eine Oberfunktion ψ_0 so finden, daß

$$M_K\psi_0(\mathfrak{x}_0) - u(\mathfrak{x}_0) < \frac{\varepsilon}{3G},$$

mithin nach (5) innerhalb K' einschließlich seines Randes

$$(6)\qquad M_K\psi_0(\mathfrak{x}) - u(\mathfrak{x}) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Auf Grund der Stetigkeit von $M_K\,\psi_0(\mathfrak{x})$ kann man eine Umgebung von $\mathfrak{x}_0$: $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| < \delta$ innerhalb K' so bestimmen, daß

$$|M_K\psi_0(\mathfrak{x}) - M_K\psi_0(\mathfrak{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Dann erhält man

$$\begin{aligned} &|u(\mathfrak{x}) - u(\mathfrak{x}_0)| \\ &= |(u(\mathfrak{x}) - M_K\psi_0(\mathfrak{x})) + (M_K\psi_0(\mathfrak{x}) - M_K\psi_0(\mathfrak{x}_0)) + (M_K\psi_0(\mathfrak{x}_0) - u(\mathfrak{x}_0))| \\ &\leqq |\cdots\cdots| + |\cdots\cdots| + |\cdots\cdots| < 3\,\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da dies für jeden Punkt $\mathfrak{x}_0$ gilt, ist die Stetigkeit von $u(\mathfrak{x})$ im Innern des Gebietes bewiesen. Man kann nunmehr im Kreise K' ein gewöhnliches *Poisson*sches Integral über $u(\mathfrak{x})$ bilden. Es ist

$$u \leqq \psi,$$

also

$$M_{K'}u < M_{K'}\psi.$$

Da u die untere Grenze der $M_{K'}\psi$, so ist

$$(7)\qquad M_{K'}u \leqq u.$$

Aus (6) folgt

$$(8)\qquad M_{K'}M_K\psi_0(\mathfrak{x}) - M_{K'}u(\mathfrak{x}) < \varepsilon.$$

---

[1]) Der Kunstgriff, bei positiven Randwerten des *Poisson*schen Integrals die *Poisson*sche Funktion durch eine Konstante abzuschätzen und so den Wert des Integrals in einem beliebigen Punkte mit dem Wert im Mittelpunkte zu vergleichen, findet sich bei *Harnack*, Theorie des logarithmischen Potentials, Leipzig 1887, S. 61—62.

Diese Ungleichung gilt zunächst auf dem Rande von K', also auch im Innern, da Potentialfunktionen ihr Maximum nur auf dem Rande annehmen. Da $M_K \psi_0(\mathfrak{x})$ auf dem Rande und im Innern von K' eine reguläre Potentialfunktion ist, so ist

$$M_{K'} M_K \psi_0(\mathfrak{x}) = M_K \psi_0(\mathfrak{x}).$$

Dies in (8) eingesetzt ergibt

$$M_K \psi_0(\mathfrak{x}) - M_{K'} u(\mathfrak{x}) < \varepsilon$$

oder

$$M_K \psi_0(\mathfrak{x}) - \varepsilon < M_{K'} u(\mathfrak{x}),$$

also auch

$$u(\mathfrak{x}) - \varepsilon < M_{K'} u(\mathfrak{x}).$$

Da diese Ungleichung für alle $\varepsilon > 0$ gilt, so ist

$$u(\mathfrak{x}) \leqq M_{K'} u(\mathfrak{x}).$$

Das liefert in Verbindung mit (7)

$$u(\mathfrak{x}) = M_{K'} u(\mathfrak{x});$$

also ist $u(\mathfrak{x})$ eine harmonische Funktion, da man jeden inneren Punkt des Gebietes mit zwei konzentrischen Kreisen K und K' umschließen kann.

Kurventypen auf Flächen.

Von *Reinhold Baer* in Freiburg i. Br.

Mit einer Figur.

Inhalt:

		Seite
	Einleitung	231
§ 1.	Schnittklassen geschlossener Kurven	232
	Anhang 1: Invariante Bestimmung der unendlichen, orientierten Schnittreihe	241
	Anhang 2: Charakterisierung der Elemente der Fundamentalgruppe	241
§ 2.	Die *Dehn*schen Normalformen	242
	I. Konstruktion der *Dehn*schen Normalformen	242
	II. Invarianz der *Dehn*schen Normalformen	244
	III. Die *Dehn*schen Normalformen für Systeme von endlich vielen Kurven	246

Einleitung.

Wir betrachten eine orientierbare und geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$ vom Geschlecht $p > 1$ und legen uns die Frage vor:

Wann sind zwei geschlossene und stetige Kurven auf $\mathfrak{F}$ homotop? m. a. W.: Welches sind die Invarianten eines Typus homotoper Kurven auf $\mathfrak{F}$?

1. Im § 1 werden wir hierauf eine Antwort geben, bei der über die Kurventypen weiter keine beschränkenden Annahmen gemacht werden. Um den Kurventypus zu charakterisieren, wird von den orientierten, irreduziblen Schnittklassen einer Kurve $\mathfrak{C}$ mit andern Kurven ausgegangen. Diese — *Nielsen*schen — Invarianten reichen aber nicht aus, um den Typus vollständig zu bestimmen. Wir werden deshalb noch eine weitere Invariante bilden, indem wir zwischen den irreduziblen Schnittklassen einer Kurve mit einem Kurvensystem eine Reihenfolge festlegen. Diese Schnittreihe ist dann ebenfalls eine Invariante des Typus und zwar für jedes beliebige Kurvensystem. Wählt man das Kurvensystem geeignet aus, so wird die Schnittreihe mit diesem Kurvensystem — ev. unter Hinzunahme einer weiteren trivialen Invariante — den Typus vollständig charakterisieren; es stimmen also zwei Kurven in allen Schnittreihen überein, wenn sie es in einer bestimmten tun. Hierbei erhalten wir gleichzeitig eine gewisse Übersicht über die möglichen Kurventypen.

2. Nach dem Vorgang von *M. Dehn* werden wir im § 2 Normalformen von einfachen Kurven herstellen, die den Typus, dem die Kurven angehören, vollständig bestimmen sollen; daß sie dies wirklich tun, wird durch Zurückführung auf die Schnittreihen bewiesen.

§ 1. Schnittklassen geschlossener Kurven.

Sei $\mathfrak{F}$ eine orientierbare, nichtberandete Fläche vom Geschlecht $p > 1$. Mit $\mathfrak{U}$ bezeichnen wir dann die universelle Überlagerungsfläche [1]) von $\mathfrak{F}$. Die Fundamentaleigenschaft von $\mathfrak{U}$ ist:

(*F*) *Eine geschlossene und stetige Kurve* $\mathfrak{C}$ [2]) *auf* $\mathfrak{F}$ *ist dann und nur dann homotop* [1]) *null, wenn auch die über* $\mathfrak{C}$ *in* $\mathfrak{U}$ *gelegenen Kurven geschlossen sind.*

Ist also $\mathfrak{C}$ nicht homotop null, so liegen über $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{U}$ Kurven, die Paare äquivalenter, aber nicht zusammenfallender Punkte verbinden. Hieraus und aus (*F*) sieht man auch, daß zwei Kurven auf $\mathfrak{F}$ dann und nur dann homotop sind, wenn es über jeder von ihnen eine derartige Kurve in $\mathfrak{U}$ gibt, daß sich die Endpunkte der einen mit denen der andern durch äquivalente Kurven verbinden lassen.

Ein kanonisches Schnittsystem $\{a_i, b_i\}$ $(i = 1, \ldots, p)$ von $\mathfrak{F}$ definiert in $\mathfrak{U}$ ein Netz von $4p$-Ecken; $\mathfrak{U}$ läßt sich topologisch, d. h. eineindeutig und stetig auf den als hyperbolische Ebene aufgefaßten, mit einem Netz regulärer $4p$-Ecke der Winkel $\frac{\pi}{2p}$ überdeckten Einheitskreis abbilden [3]). Dadurch ist in $\mathfrak{U}$ eine Metrik, Geradlinigkeit usw. definiert, welche wir dann auch $\mathfrak{F}$ aufprägen können.

Sei $\mathfrak{A}$ eine stetige und geschlossene Kurve [4]) auf $\mathfrak{F}$ und nicht homotop null; dann gibt es in $\mathfrak{U}$ stetige Kurven $\overline{\mathfrak{A}}$, die ganz über $\mathfrak{A}$ gelegen sind, und — von den Endpunkten abgesehen — liegt über jedem Punkt von $\mathfrak{A}$ genau ein Punkt von $\overline{\mathfrak{A}}$. (Wäre $\mathfrak{A}$ homotop null, so würden die entsprechenden Kurven $\overline{\mathfrak{A}}$ geschlossen sein.) Durch Aneinanderstücken solcher Kurven $\overline{\mathfrak{A}}$ mit einem gemeinsamen Endpunkt erhalten wir Kurven $f(\mathfrak{A})$ [5]), die je zwei Punkte des $\mathfrak{U}$ berandenden Einheitskreises miteinander verbinden [6]). Dann liegen über jedem Punkte von $\mathfrak{A}$ abzählbar unendlich viele Punkte eines solchen $f(\mathfrak{A})$; zu jedem $\mathfrak{A}$ gehören abzählbar unendlich viele $f(\mathfrak{A})$, die je $\mathfrak{U}$ in wenigstens zwei Teile zerlegen. Ist $\mathfrak{A}$ gerichtet, so ist damit auch jedem $f(\mathfrak{A})$ ein Durchlaufungssinn aufgeprägt.

$\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann einfach, d. h. topologisches Bild der Kreislinie, wenn die $f(\mathfrak{A})$ einfach und untereinander punktfremd sind.

Jedem Punkt P_1 eines $f(\mathfrak{A})$ läßt sich eindeutig ein Punkt P_2 auf demselben $f(\mathfrak{A})$ so zuordnen, daß der Kurvenbogen $\overrightarrow{P_1P_2}$ von $f(\mathfrak{A})$ mit $f(\mathfrak{A})$ gleichgerichtet und gleich einem $\overline{\mathfrak{A}}$ ist; P_2 ist dann notwendig äquivalent zu P_1 und möge der zu P_1 „benachbarte“ äquivalente Punkt von $f(\mathfrak{A})$ heißen.

Zwei gerichtete Kurven gehören zum gleichen Typus, wenn sie homotop, d. h. durch stetige Deformationen ineinander überführbar sind. Das Ziel der fol-

---

[1]) Für diesen und andere mit ihm zusammenhängende, hier benutzte Begriffe cf. *v. Kerékjártó:* Topologie I, Berlin 1923, p. 173, 176, 179/180.

[2]) d. h. eindeutiges und stetiges Bild der ebenen Kreislinie, cf. *v. Kerékjártó*, l. c., p. 124.

[3]) cf. *v. Kerékjártó,* l. c., p. 179/180.

[4]) im folgenden kurz „Kurve“ genannt.

[5]) cf. *J. Nielsen:* Über topologische Abbildungen geschlossener Flächen, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg III (1924), p. 248.

[6]) Dies ist auch der Grund, warum wir uns auf das Geschlecht $p > 1$ beschränken müssen; denn für $p = 1$ wird $\mathfrak{U}$ der Euklidischen Ebene mit dem Quadratgitter als Polygonnetz homoiomorph.

genden Untersuchungen ist es, vermittels der Schnittklassen das vollständige Invariantensystem eines Typus aufzustellen.

Haben zwei gerichtete Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{K}$, die beide nicht homotop null sein mögen, irgend zwei Punkte P_1 und P_2 gemein [1]), so bestimmen diese — bis auf ganze Umläufe von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{K}$ eindeutig — je einen Bogen auf $\mathfrak{C}$ und auf $\mathfrak{K}$. Durchlaufen wir irgend einen solchen Bogen auf $\mathfrak{C}$ von P_1 nach P_2 und einen auf $\mathfrak{K}$ von P_2 nach P_1, so ergibt sich eine geschlossene Kurve $\mathfrak{H}$. Die allgemeinste geschlossene Kurve dieser Art, die durch P_1 und P_2 bestimmt ist, gewinnen wir aus $\mathfrak{H}$ durch ganze Umläufe um $\mathfrak{C}$ und um $\mathfrak{K}$, was man symbolisch so ausdrücken kann: $\mathfrak{H}' = \mathfrak{C}^m \mathfrak{H} \mathfrak{K}^n$, wo m, n beliebige ganze Zahlen sind.

P_1 und P_2 sind zusammengehörige Schnitte von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{K}$, wenn sich zwei ganze Zahlen m, n so bestimmen lassen, daß $\mathfrak{C}^m \mathfrak{H} \mathfrak{K}^n$ homotop null wird.

Satz 1: *Zwei $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{K}$ gemeinsame Punkte P_1, P_2 sind dann und nur dann zusammengehörige Schnitte von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{K}$, wenn sich jedem über P_1 gelegenen Punkte $\overline{P}_1$ eines $f(\mathfrak{C})$ ein über P_2 gelegener Punkt $\overline{P}_2$ desselben $f(\mathfrak{C})$ so zuordnen läßt, daß $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_2$ auch auf dem gleichen $f(\mathfrak{K})$ gelegen sind* [2]).

Vorbemerkung: Wir hätten also die Bedingung des Satzes auch als Definition der Zusammengehörigkeit benutzen können. — Der Satz leistet uns eine Übertragung des Begriffes von $\mathfrak{F}$ nach $\mathfrak{U}$.

Beweis: A. Wenn die Bedingung des Satzes erfüllt ist, so werden die Punkte $\overline{P}_i$ durch je einen Bogen eines $f(\mathfrak{C})$ und eines $f(\mathfrak{K})$ miteinander verbunden; diese geschlossene Kurve in $\mathfrak{A}$ liegt über einer von P_1 und P_2 bestimmten Kurve $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{F}$, die wegen (F) homotop null ist.

B. Wenn P_1 und P_2 zusammengehörige Schnitte von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{K}$ sind, so gibt es durch P_i berandete Kurvenbogen $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{K}'$ auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{K}$, so daß die aus ihnen zusammengesetzte geschlossene Kurve $\mathfrak{H}'$ homotop null ist. Wegen (F) müssen sich dann zwei Bogen $\overline{\mathfrak{C}'}$ und $\overline{\mathfrak{K}'}$ in $\mathfrak{U}$ mit den gleichen Endpunkten $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ auf $f(\mathfrak{C})$ bezw. $f(\mathfrak{K})$ finden lassen, q. e. d.

Zusatz 1: *Wenn P_1, P_2 und P_2, P_3 zusammengehören, so tun dies auch P_1, P_3* [3]).

Beweis: Wenn die Bedingung des Zusatzes erfüllt ist, so lassen sich über P_i $(i = 1, 2, 3)$ gelegene Punkte P finden, die alle auf dem gleichen $f(\mathfrak{C})$ und $f(\mathfrak{K})$ gelegen sind, q. e. d.

Wir sind also berechtigt, alle zusammengehörigen Schnitte von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{K}$ in die gleiche Schnittklasse [4]) *von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{K}$ zu tun.*

---

[1]) Ist P_i mehrfacher Punkt von $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{K}$, so ist zu unterscheiden, ob P_i als Bildpunkt des einen oder andern Punktes der Kreislinie aufgefaßt wird.

[2]) Hierbei ist zu beachten, daß, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^n$ ist, auch in jedem $f(\mathfrak{B})$ genau n verschiedene $f(\mathfrak{A})$ zusammenfallen. Jeder Schnittklasse mit $\mathfrak{B}$ werden also n Schnittklassen mit $\mathfrak{A}$ entsprechen.

[3]) cf. Anm. [1]) p. 233, deren Nichtberücksichtigung zu falschen Anwendungen des Zusatzes führen kann.

[4]) Diesen Begriff hat Herr Professor *J. Nielsen* in einem Hamburger Vortrag (1924) eingeführt, dessen Manuskript mir in freundlicher Weise zur Einsicht zur Verfügung gestellt wurde; hierfür bin ich Herrn Professor *J. Nielsen* dankbarst verpflichtet.

Dieser Schnittklassenbegriff gestattet, daß $\mathfrak{K} = \mathfrak{C}$ ist, wodurch dann auch die Doppelpunkte von $\mathfrak{C}$ in Schnittklassen eingeteilt werden [1]).

Zusatz 2: *Die Zahl der Schnittklassen von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{K}$ ist endlich.*

Beweis: Diese Zahl ist nämlich wegen Satz 1, p. 233 höchstens gleich der Zahl der $f(\mathfrak{K})$, mit denen ein $\overline{\mathfrak{C}}$ Punkte gemein hat. Ein $\overline{\mathfrak{C}}$ hat aber nur mit endlich vielen Fundamentalpolygonen von $\mathfrak{U}$ Punkte gemein und durch ein Fundamentalpolygon gehen nur endlich viel $f(\mathfrak{K})$, da sich die $f(\mathfrak{K})$ im Endlichen von $\mathfrak{U}$ nicht häufen können, q. e. d.

Im folgenden werden wir uns auf die Betrachtung solcher Kurven $\mathfrak{A}$ beschränken, für die $f(\mathfrak{A})$ einfach ist. Diese Einschränkung ist unwesentlich, da es zu jedem $\mathfrak{A}$ wenigstens ein homotopes $\mathfrak{A}'$ gibt, so daß $f(\mathfrak{A})$ und $f(\mathfrak{A}')$ gemeinsame Endpunkte haben und $f(\mathfrak{A}')$ einfach ist. Man wähle etwa die Gerade in $\mathfrak{U}$, die mit $f(\mathfrak{A})$ die Endpunkte gemein hat.

Von jetzt ab bestimmt also ein $f(\mathfrak{A})$ genau zwei Teile von $\mathfrak{U}$.

Irgend zwei Punkte Q_1 und Q_2 in $\mathfrak{U}$ werden durch ein $f(\mathfrak{A})$ getrennt, wenn sie beide in verschiedenen der von $f(\mathfrak{A})$ bestimmten Teile von $\mathfrak{U}$ gelegen sind. — Liegt insbesondere wenigstens der eine von beiden Punkten auf $f(\mathfrak{A})$, so werden die beiden Punkte durch $f(\mathfrak{A})$ nicht getrennt.

Sei $\mathfrak{C}$ eine gerichtete Kurve auf $\mathfrak{F}$ und nicht homotop null; wir betrachten ein bestimmtes $f(\mathfrak{C}) = \overrightarrow{M_1 M_2}$, wo der Durchlaufungssinn von $f(\mathfrak{C})$ durch den von $\mathfrak{C}$ bestimmt ist, und wo M_1 den Anfangspunkt, M_2 den Endpunkt von $f(\mathfrak{C})$ bedeutet. Die Menge der Spurpunkte der Punkte, die dies $f(\mathfrak{C})$ mit einem $f(\mathfrak{K})$ gemein hat, bildet nach Satz 1, p. 233 eine vollständige Schnittklasse von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{K}$.

Wir nennen dies $f(\mathfrak{K})$ hinsichtlich des vorgegebenen $f(\mathfrak{C})$ eine Erzeugende dieser Schnittklasse von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{K}$.

Es bestehen die folgenden Möglichkeiten:

1. alle $f(\mathfrak{K})$, die Erzeugende einer vorgegebenen Schnittklasse von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{K}$ sind, trennen M_1 nicht von M_2;

2. M_1 liegt auf dem rechten, M_2 auf dem linken Ufer aller die Schnittklasse erzeugenden $f(\mathfrak{K})$;

3. M_1 liegt auf dem linken, M_2 auf dem rechten Ufer aller die Schnittklasse erzeugenden $f(\mathfrak{K})$.

Hingegen ist es nicht möglich, daß eine der Erzeugenden einer Schnittklasse unter einen, eine andere unter einen andern der drei Fälle gehört. Denn zwei auf $f(\mathfrak{C})$ dieselbe Schnittklasse erzeugende $f(\mathfrak{K})$ werden durch eine topologische Abbildung von $\mathfrak{U}$ auf sich [2]) ineinander übergeführt, bei der alle Punkte von $\mathfrak{U}$ in äquivalente übergehen und der Umlaufssinn des Randes von $\mathfrak{U}$ wie auch die Punkte M_1 und M_2 in Ruhe bleiben.

Im Falle 1. *nennen wir die Schnittklasse reduzibel, im Falle* 2. *positiv-irreduzibel, im Falle* 3. *negativ-irreduzibel.*

---

[1]) Hierdurch werden allerdings alle die Doppelpunkte nicht erfaßt, die dadurch entstehen, daß etwa $\mathfrak{C}$ homotop $\mathfrak{A}^n$ ist.

[2]) sog. Decktransformation.

Ein irreduzibler Schnittpunkt ist ein solcher Schnittpunkt von $\mathfrak{C}$ *mit* $\mathfrak{K}$, *der einziges Individuum einer irreduziblen Schnittklasse ist.*

Ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{C}$, so haben wir damit auch die Begriffe reduzibel usw. für mehrfache Punkte von $\mathfrak{C}$ definiert; insbesondere kann es also irreduzible Doppelpunkte geben.

Die Berechtigung der Termini: reduzibel, irreduzibel zeigt der folgende

Satz 2: *Sei* $\{\mathfrak{K}^\varkappa\}$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ *irgendein System von Kurven; dann gibt es ein System* $\{\mathfrak{K}_1^\varkappa\}$, *so daß*

1. $\mathfrak{K}_1^\varkappa$ *homotop* $\mathfrak{K}^\varkappa$,

2. *die Kurven* $\mathfrak{K}_1^\varkappa$ *untereinander und mit sich selbst nur irreduzible Schnittpunkte gemein haben, ev. allerdings mehrfach durchlaufene Kurven werden.*

Beweis: Betrachtet man die Geraden $f(\mathfrak{G}^\varkappa)$, die mit $f(\mathfrak{K}^\varkappa)$ die Endpunkte gemein haben, so haben zwei $f(\mathfrak{G}^\varkappa)$ höchstens einen Punkt gemein, wenn sie nicht zusammenfallen. Fällt ein $f(\mathfrak{G}^{\varkappa_1})$ mit einem $f(\mathfrak{G}^{\varkappa_2})$ zusammen, so ersetzen wir die Geraden $f(\mathfrak{G}^{\varkappa_2})$ durch so nahe an $f(\mathfrak{G}^{\varkappa_1})$ verlaufende Kurven $f(\mathfrak{G}_1^{\varkappa_2})$, daß $f(\mathfrak{G}^{\varkappa_1})$ und $f(\mathfrak{G}_1^{\varkappa_2})$ nur die Endpunkte gemein haben, und die $f(\mathfrak{G}_1^{\varkappa_2})$ mit andern $f(\mathfrak{G}^\varkappa)$ höchstens einen Punkt gemein haben. Ist $\mathfrak{G}^\varkappa$ bzw. $\mathfrak{G}_1^\varkappa$ so ausgewählt, daß $\overline{\mathfrak{G}}^\varkappa$ bzw. $\overline{\mathfrak{G}}_1^\varkappa$ auf $f(\mathfrak{G}^\varkappa)$ bzw. $f(\mathfrak{G}_1^\varkappa)$ benachbarte äquivalente Punkte verbindet, so ist $\mathfrak{K}^\varkappa$ einem Vielfachen von $\mathfrak{G}^\varkappa$ oder $\mathfrak{G}_1^\varkappa$ homotop, welches die gesuchte Kurve $\mathfrak{K}_1^\varkappa$ ist, q. e. d.

Um die Kurventypen vollständig zu charakterisieren, wollen wir unter den irreduziblen Schnittklassen einer Kurve $\mathfrak{C}$ mit einem Kurvensystem $\{\mathfrak{K}^\varkappa\}$ eine Reihenfolge festlegen. Wegen Satz 1, p. 233 wird es hierbei genügen, dies mit den Erzeugenden der Schnittklassen zu tun.

Seien die Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{K}^\varkappa$ nicht homotop null; von den Kurven $\mathfrak{K}^\varkappa$ mögen je zwei nur irreduzible Schnittklassen gemein haben; schließlich soll es nicht vorkommen, daß für $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ die m_1-mal durchlaufene Kurve $\mathfrak{K}^{\varkappa_1}$ homotop der m_2-mal durchlaufenen Kurve $\mathfrak{K}^{\varkappa_2}$ wird, d. h. kein $f(\mathfrak{K}^{\varkappa_1})$ soll mit einem $f(\mathfrak{K}^{\varkappa_2})$ gemeinsame Endpunkte haben.

Wir betrachten jetzt ein festes $f(\mathfrak{C}) = f_0(\mathfrak{C}) = \overrightarrow{M_1 M_2}$. Die Erzeugenden der irreduziblen Schnittklassen von $\mathfrak{C}$ mit $\{\mathfrak{K}^\varkappa\}$ sind die $f(\mathfrak{K}^\varkappa)$, die M_1 von M_2 trennen. Jede dieser Erzeugenden wird in einem gewissen Punkte $S^\varkappa$ zum — im Durchlaufungssinn von $f_0(\mathfrak{C})$ — ersten Mal von $f_0(\mathfrak{C})$ angetroffen, da die f abgeschlossene Punktmengen sind, und da $f_0(\mathfrak{C})$ mit keiner der Erzeugenden gemeinsame Endpunkte haben kann. Diese Punkte $S^\varkappa$ legen unter den Erzeugenden eindeutig eine Reihenfolge fest, außer wenn zufällig mehrere $f(\mathfrak{K}^\varkappa)$ in einem ihnen allen gemeinsamen Punkte von $f_0(\mathfrak{C})$ zum ersten Male angetroffen werden.

In diesen Unbestimmtheitsstellen legen wir die Reihenfolge willkürlich fest[1]).

Die so geordnete, beiderseits unendliche Reihe der Erzeugenden der positiv- oder

[1]) Diese Festlegung möge aber in äquivalenten Unbestimmtheitsstellen dieselbe sein!

negativ-irreduziblen Schnittklassen von $\mathfrak{C}$ mit $\{\mathfrak{K}^x\}$ heiße die unendliche, orientierte Schnittreihe von $\mathfrak{C}$ mit $\{\mathfrak{K}^x\}$.

Mit dieser unendlichen Schnittreihe dürfen die folgenden erlaubten Transpositionen ausgeführt werden:

Vertauschung von zwei konsekutiven Elementen, wenn die diesen Elementen entsprechenden Erzeugenden eine irreduzible Schnittklasse gemein haben[1]*, d. h. wenn die Endpunkte der einen Erzeugenden durch die andere Erzeugende voneinander getrennt werden.*

Dies tritt wegen (F) dann und nur dann ein, wenn sich durch eine Deformation von $\mathfrak{C}$ bewirken läßt, daß die die fraglichen Elemente repräsentierenden S^x in eine Unbestimmtheitsstelle zusammenfallen.

Durch diese erlaubten Operationen kann man jede der möglichen willkürlichen Festlegungen der Reihenfolge der Erzeugenden in einer Unbestimmtheitsstelle in jede andere mögliche überführen.

(1) *Die unendliche orientierte Schnittreihe ist bis auf erlaubte Transpositionen gegenüber Deformationen von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{K}^x$ invariant*[2]*.*

Denn in der unendlichen, orientierten Schnittreihe kommt 1. eine Erzeugende f_1 vor einer andern f_2, wenn f_1 den Punkt M_1 von f_2 trennt; ihre Lage ist 2. unbestimmt[3], wenn sie eine irreduzible Schnittklasse gemein haben. Dies hängt aber einzig davon ab, wie die Endpunkte der f_i sich zu M_1 und M_2 verhalten. Der Fall 1. tritt nämlich ein, wenn auf den beiden durch M_1, M_2 bestimmten Bogen des $\mathfrak{U}$ berandenden Einheitskreises der Endpunkt von f_1 den von f_2 von M_1 trennt; der Fall 2. tritt aber ein, wenn dies nur auf dem einen Bogen der Fall ist, auf dem andern aber das Umgekehrte statthat. — Weiter hängt die Orientierung der durch die Erzeugende repräsentierten Schnittklasse nur davon ab, auf welchem der beiden Bogen der Anfangs-, auf welchem der Endpunkt der Erzeugenden gelegen ist. — Da also die Reihenfolge der Erzeugenden nur von der Lage ihrer Endpunkte zu M_1, M_2 abhängt — abgesehen von den Unbestimmtheitsstellen des Falles 2., wo sich aber durch die erlaubten Transpositionen jede mögliche Reihenfolge herstellen läßt —, da ferner für die Orientierung der Schnittklassen dasselbe gilt, und da diese Endpunkte bei Deformationen von $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{K}^x$ fest bleiben, so ist (1) bewiesen.

Nach Zusatz 2 zu Satz 1, p. 834 kommen unter den in der unendlichen, orientierten Schnittreihe auftretenden Schnittklassen nur endlich viele verschiedene vor. Wir müssen aus ihr also eine gewisse endliche Schnittreihe herausgreifen.

Sei $\overline{\mathfrak{C}} = \overrightarrow{P_1 P_2}$ irgendwie fest auf $f_0(\mathfrak{C})$ angenommen.

Dann erhalten wir die endliche, orientierte Schnittreihe von $\mathfrak{C}$ mit $\{\mathfrak{K}^x\}$, indem wir aus der unendlichen orientierten Schnittreihe in der durch sie festgelegten Reihenfolge und Orientierung die Reihe von Erzeugenden herausgreifen, die P_1 von P_2 trennen[4]*.*

---

[1]) Die sämtlichen Erzeugenden der gleichen Schnittklasse sollen in gleicher Weise transponiert werden.

[2]) sofern diese nach Ausführung der Deformation überhaupt noch definiert ist.

[3]) bezw. durch eine Deformation von $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{K}^x$ unbestimmt zu machen.

[4]) Ausnahmsweise möge ein f auch dann P_1 von P_2 „trennen“, wenn P_1 (nicht P_2) auf f liegt.

Mit den Elementen dieser Schnittreihe dürfen außer den erlaubten Transpositionen auch zyklische Permutationen vorgenommen werden, welche beiden Operationsarten wir unter dem Namen der erlaubten Operationen zusammenfassen. — Diese zyklischen Permutationen werden z. B. durch andere Wahl der Punkte P_1, P_2 erzwungen.

Da $f(\mathfrak{C})$ aus einer beiderseits unendlichen Folge aneinandergesetzter $\overline{\mathfrak{C}}$ besteht, die untereinander äquivalent sind, stellt die so gewonnene endliche orientierte Schnittreihe eine Periode der unendlichen dar. Ist n die Zahl der Elemente der endlichen, orientierten Schnittreihe, so stellt jede Reihe von n konsekutiven Elementen der unendlichen Schnittreihe eine Periode derselben dar, und alle diese n-elementigen Perioden lassen sich aus einer — etwa unserer endlichen Schnittreihe — durch erlaubte Operationen gewinnen.

(1 a) *Wegen* (1) *stellen aber diese n-elementigen Perioden Invarianten gegenüber Deformationen von* $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{R}^x$ *dar.*

Wir zeigen jetzt:

(2) *Die Zahl* $\pi[\nu]$ *der positiv-[negativ-]irreduziblen Schnittklassen einer Kurve* $\mathfrak{C}$ *mit einer Kurve* $\mathfrak{R}$ *ist invariant gegenüber Deformationen von* $\mathfrak{C}$, *also wegen der Symmetrie der Aussage auch gegenüber Deformationen von* $\mathfrak{R}$ [1]).

Sei etwa $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}_1$ deformierbar; seien $f_0(\mathfrak{C})$ und $f_0(\mathfrak{C}_1)$ so ausgewählt, daß sie dieselben Endpunkte M_1, M_2 haben; sei auf $f_0(\mathfrak{C})$ ein $\overline{\mathfrak{C}} = \overrightarrow{P_1 P_2}$ willkürlich ausgewählt. Wir betrachten die $f(\mathfrak{R})$, die sowohl M_1 von M_2, als auch P_1 von P_2 trennen, und auf deren rechter [linker] Seite M_1 liegt, die also sämtliche positiv-[negativ-]irreduziblen Schnittklassen von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{R}$ erzeugen; und zwar erzeugen nicht zwei dieselbe Schnittklasse; ihre Zahl ist also $= \pi[= \nu]$. Dann ziehen wir von P_1 aus einen einfachen Kurvenbogen $\mathfrak{G}_1$ nach einem beliebigen Punkt Q_1 auf $f_0(\mathfrak{C}_1)$, der außer Q_1 keinen Punkt mit $f_0(\mathfrak{C}_1)$ gemein habe und keine der P_1 von P_2 trennenden Erzeugenden schneide. Durch P_2 ziehen wir den zu $\mathfrak{G}_1$ äquivalenten Kurvenbogen $\mathfrak{G}_2$, der $f_0(\mathfrak{C}_1)$ in Q_2 treffe. Da also Q_2 äquivalent zu Q_1 ist und $\mathfrak{C}$ homotop $\mathfrak{C}_1$, so ist wegen (F) der Bogen $\overrightarrow{Q_1 Q_2} = \overline{\mathfrak{C}_1}$. Die Zahl der $f(\mathfrak{R})$, die sowohl M_1 von M_2 als auch Q_1 von Q_2 trennen, und auf deren rechter [linker] Seite M_1 liegt, ist

$\pi[\nu]$ + Zahl der $f(\mathfrak{R})$, die M_1 von M_2, P_1 von Q_1 trennen und auf deren rechter [linker] Seite M_1 liegt,
— Zahl der $f(\mathfrak{R})$, die M_1 von M_2, P_2 von Q_2 trennen und auf deren rechter [linker] Seite M_1 liegt,

$= \pi[\nu]$,

da $\mathfrak{G}_1$ äquivalent $\mathfrak{G}_2$ ist, womit (2) bewiesen. Aus (2) folgt sofort die Invarianz der Zahl $n = \pi + \nu$ aus (1 a) und also aus (1 a) und (2) die Invarianz der endlichen, orientierten Schnittreihe von $\mathfrak{C}$ mit $\{\mathfrak{R}^x\}$ bis auf erlaubte Operationen. Da schließlich jede andere Wahl der bei der Definition der endlichen, orientierten Schnittreihe

---

[1]) Hierin ist auch die Invarianz der Charakteristik $(\mathfrak{C}, \mathfrak{R}) = \pi - \nu$ enthalten; cf. *H. Weyl:* Strenge Begründung ...; Jahresbericht der D. M. V. 25 (1917), p. 265.

benutzten Punkte P_1, P_2 sich durch eine Deformation von $\mathfrak{C}$ in sich bewirken läßt, so gilt der

Satz 3: *Die endliche, orientierte Schnittreihe von $\mathfrak{C}$ mit $\{\mathfrak{K}^\varkappa\}$ ist bis auf erlaubte Operationen invariant gegenüber Deformationen von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{K}^\varkappa$ und unabhängig von der Auswahl der Punkte P_1, P_2 auf $f_0(\mathfrak{C})$.*

Es genügt also, um die Schnittreihe von $\mathfrak{C}$ mit $\{\mathfrak{K}^\varkappa\}$ aufzustellen, dies für die Kurven $\{\mathfrak{C}_1; \mathfrak{K}_1^\varkappa\}$ zu tun, die ihnen nach Satz 2, p. 235 zugeordnet sind. Hier erhält man die endliche, orientierte Schnittreihe, indem man $\mathfrak{C}_1$ von einem beliebigen Punkt P aus ihrer Orientierung gemäß genau einmal durchläuft; sie ist die Reihe der Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_1$ mit $\{\mathfrak{K}_1^\varkappa\}$.

Um durch derartige Invarianten die Kurventypen vollständig charakterisieren zu können, konstruieren wir das folgende Kurvensystem [1]):

Unter den Kurven: $UK\,1, \ldots, UK(p+1)$ sei ein System von einfachen, untereinander punktfremden Kurven verstanden, das $\mathfrak{F}$ in zwei berandete Flächen O, U zerlegt, die je einer Kugel mit $(p+1)$ Löchern homoiomorph sind; unter den Kurven: $SK\,1, \ldots, SK(p+1)$ ein System einfacher, untereinander punktfremder Kurven, das $\mathfrak{F}$ in zwei berandete Flächen I, II zerlegt, die je einem von $(p+1)$ Kreisen berandeten ebenen Bereich homoiomorph sind. Jeder $UK[SK]$ habe mit genau zwei $SK[UK]$ je einen irreduziblen Schnittpunkt und sonst mit keinem $SK[UK]$ Punkte gemein. Wir wählen die UK, SK so, daß über ihnen in $\mathfrak{U}$ gerade Linien liegen; weiter erteilen wir ihnen einen beliebigen Durchlaufungssinn.

Unter Σ sei das System der UK und SK verstanden. Da in Σ keine zwei verschiedenen Kurven vorkommen, die miteinander reduzible Schnittklassen haben, oder deren zugehörige f in $\mathfrak{U}$ gemeinsame Endpunkte hätten, *so ist die endliche, orientierte Schnittreihe S einer Kurve $\mathfrak{C}$ mit Σ eine Invariante des Typus von $\mathfrak{C}$, wie aus Satz 3 folgt.*

Das System Σ zerlegt $\mathfrak{F}$ in vier Elementarbereiche

$$\mathfrak{E}_i\,(i = 1, 2, 3, 4) = (\mathrm{I}\,O,\ \mathrm{I}\,U,\ \mathrm{II}\,O,\ \mathrm{II}\,U).$$

Über jedem $\mathfrak{E}_i$ liegen in $\mathfrak{U}$ gewisse einfach zusammenhängende Gebiete, so daß über jedem Punkt von $\mathfrak{E}_i$ genau ein Punkt dieses Gebiets liegt; diese Gebiete nennen wir der Kürze halber ebenfalls $\mathfrak{E}_i$; in ihnen gibt es keine Paare äquivalenter Punkte.

Um unbequeme Erweiterungen des Systems Σ zu vermeiden, definieren wir noch eine zweite Invariante von Kurventypen [2]):

---

[1]) cf. hierzu Fig. 1, p. 243.

[2]) Betrachten wir z. B. das Kurvensystem T, das aus einem kanonischen Schnittsystem $\{a_i, b_i\}$ von $\mathfrak{F}$ (cf. p. 232!) und den Kurven $b_{i-1}^{-1} \cdot a_i$ bezw. $b_p^{-1} \cdot a_1$ (Produktbildung wie in der *Poincaré*schen Fundamentalgruppe von $\mathfrak{F}$, cf. p. 241 f.!) besteht. Diese letzten Kurven sind nötig, weil die gemeinsame Ecke von b_{i-1}^{-1} und a_i, bezw. b_p^{-1} und a_1 im Fundamentalpolygon nur einen Berührungspunkt, also keinen irreduziblen Schnittpunkt darstellt.

Daß die Schnittreihe von $\mathfrak{C}$ mit T ein vollständiges Invariantensystem des Typus von $\mathfrak{C}$ darstellt, zeigt man ähnlich wie den Satz 4, p. 239; nur werden hier die Fundamentalpolygone in p

Eine Kurve $\mathfrak{C}$ erhält den Index $J = I$ oder II [O oder U],

1. wenn in der endlichen, orientierten Schnittreihe S mit Σ nicht nur zwei verschiedene $XK(X = S, U)$ auftreten, welche beide mit demselben $YK(Y \neq X)$ Punkte gemein haben, d. h. wenn $\mathfrak{C}$ nicht der mehrfach durchlaufenen Kurve YK homotop ist;

2. die zu $\mathfrak{C}$ homotope Kurve $\mathfrak{C}_1$, über der in $\mathfrak{U}$ gerade Linien liegen, ganz auf I oder ganz auf II [O oder U] gelegen ist.

In allen anderen Fällen wird $J = 0$ gesetzt.

Dieser Index J der Kurve $\mathfrak{C}$ ist eine Invariante des Kurventypus.

Für die Bedingung 1. gilt dies, weil S nach Satz 3 eine Invariante ist, für 2., weil zu jedem Typus genau eine solche Kurve $\mathfrak{C}_1$ gehört.

Satz 4: *Zwei Kurven $\mathfrak{C}_i (i = 1, 2)$ der Invarianten J_i, S_i gehören zum gleichen Typus, wenn*

$$J_1 = J_2 \quad \textit{und} \quad S_1 \sim S_2,$$

d. h. wenn die endlichen, orientierten Schnittreihen der beiden Kurven mit Σ durch erlaubte Operationen auf die gleiche Gestalt gebracht werden können.

Beweis: Wir betrachten zunächst die endliche, unorientierte Schnittreihe $|S|$ mit Σ. Sei P_1 ein beliebiger, in einem $\mathfrak{E}_i = \mathfrak{E}_i^{(0)}$ in $\mathfrak{U}$ gelegener Punkt. Da an jeder Kante eines $\mathfrak{E}_i$ in $\mathfrak{U}$ noch genau ein $\mathfrak{E}_n (i \neq n)$ hängt und diese beiden $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{U}$ nur diese eine Kante gemein haben, da weiter unten den Kanten eines jeden $\mathfrak{E}_i$ Kurvenstücke einer jeden Kurve aus Σ vorkommen, da schließlich die Kurven aus Σ in den Eckpunkten eines $\mathfrak{E}_i$ irreduzible Schnittpunkte haben, so bestimmt $|S|$ eindeutig eine Kette:

$$(\mathfrak{k}) \quad \mathfrak{E}_i^{(0)}, \ldots, \mathfrak{E}_k^{(\nu-1)}, \mathfrak{E}_l^{(\nu)}, \ldots, \mathfrak{E}_i^{(n)},$$

wo n die Zahl der Elemente von $|S|$ ist und wo $\mathfrak{E}_k^{(\nu-1)}$ und $\mathfrak{E}_l^{(\nu)} (k \neq l)$ längs einer Kante aneinander grenzen, die auf einer dem ν-ten Element von $|S|$ entsprechenden Erzeugenden (irreduzibler Schnittklassen mit Σ) gelegen ist.

(*a*) *Durch $\mathfrak{E}_i$ auf $\mathfrak{F}$ und $|S|$ wird eindeutig ein Kurventypus bestimmt.*

Da ($\mathfrak{k}$) durch $\mathfrak{E}_i^{(0)}$ in $\mathfrak{U}$ über $\mathfrak{E}_i$ und $|S|$ eindeutig bestimmt ist, ist zum Nachweis hiervon nur zu beweisen nötig:

Durch ($\mathfrak{k}$) wird eindeutig ein Kurventypus bestimmt [1]).

Seien nämlich $\mathfrak{C}_j (j = 1, 2)$ zwei Kurven derart, daß zu ihnen ein $\overline{\mathfrak{C}}_j = \overrightarrow{P_1^j P_2^j}$ gehört, wo P_1^j in $\mathfrak{E}_i^{(0)}$, P_2^j in $E_i^{(n)}$ gelegen ist. Verbindet man dann P_1^1 mit P_1^2 durch

---

Dreiecke mit den Kanten: $(b_{i-1}^{-1} a_i)^{-1}$, b_{i-1}^{-1}, a_i bezw. $(b_p^{-1} a_1)^{-1}$, b_p^{-1}, a_1 und ein $3p$-Eck mit den Kanten: $b_p^{-1} a_1$, $b_1, a_1^{-1}, \cdots, b_{i-1}^{-1} a_i$, $b_i, a_i^{-1}, \cdots$ zerlegt; jede der gerichteten Kurven von T kommt dann nur in einem dieser Teilpolygone vor; es steht dann eindeutig fest, von welchem dieser Teilpolygone man ausgehen muß und in welches man eintreten muß, um ein Element der Schnittreihe zu verwirklichen.

[1]) Da ($\mathfrak{k}$) keine Invariante des Typus zu sein braucht — meist wird ($\mathfrak{k}$) es allerdings sein —, so kann zu verschiedenen Ketten ($\mathfrak{k}$) derselbe Typus gehören.

eine ganz in $\mathfrak{E}_i^{(0)}$ gelegene einfache Kurve, so verbindet die äquivalente Kurve in $\mathfrak{E}_i^{(n)}$ die äquivalenten Punkte P_2^1 mit P_2^2; wegen (F) ist also

$$\mathfrak{C}_1 \text{ homotop } \mathfrak{C}_2.$$

(*b*) *Zu* $|S|$ *gehören höchstens vier verschiedene Kurventypen.*

Denn nach (*a*) entspricht jeder der vier möglichen Auswahlen des Anfangsgliedes von $(\mathfrak{k})$ und $|S|$ genau ein Kurventypus; diese vier Typen brauchen allerdings nicht sämtlich verschieden zu sein. — Wir fordern jetzt, daß $(\mathfrak{k})$ überdies mit der Orientierung von S übereinstimmt, d. h. daß von zwei konsekutiven Elementen $\mathfrak{E}_k^{(\nu-1)}$, $\mathfrak{E}_l^{(\nu)}$ von $(\mathfrak{k})$ das erste dann und nur dann rechts [links] von der $\mathfrak{E}_k^{(\nu-1)}$, $\mathfrak{E}_l^{(\nu)}$ gemeinsamen Kante liegt, wenn das ν-te Element von S positiv [negativ] orientiert ist.

Da $(\mathfrak{k})$ durch die Auswahl des ersten Elements von $(\mathfrak{k})$ und durch $|S|$ eindeutig bestimmt wird, so haben wir, um dieser Forderung zu genügen, nur das erste Element von $(\mathfrak{k})$ so auszuwählen, daß das erste und das letzte Element — die ja gleichen unteren Index haben müssen, wenn $|S|$ ein Typus geschlossener Kurven entsprechen soll — mit der Orientierung von S übereinstimmen.

Die übrigen Glieder von $(\mathfrak{k})$ *müssen dies dann von selbst tun, wenn* S *überhaupt ein Kurventypus entsprechen soll.*

1. Bestimmter Fall: Es mögen in S sowohl SK als auch UK vorkommen. Dann läßt sich durch erlaubte Operationen bewirken, daß S mit einem UK beginnt, mit einem SK endigt [oder umgekehrt]. Dann ist durch das erste Glied von S bestimmt, ob $\mathfrak{E}_i^{(0)}$ auf O oder auf U [I oder II], durch das letzte, ob $\mathfrak{E}_i^{(n)}$ auf I oder auf II [O oder U] zu liegen hat. Also ist i eindeutig durch S bestimmt. In diesem Falle ist $J = 0$.

2. Unbestimmter Fall: Es mögen in S nur UK [nur SK] vorkommen. Dann bestimmt die Orientierung des 1. Gliedes von S, ob $\mathfrak{E}_i^{(0)}$ auf O oder auf U [auf I oder auf II] zu liegen hat. Es bestehen also noch zwei Möglichkeiten für die Auswahl von $\mathfrak{E}_i^{(0)}$, von denen keine durch die Orientierung von S bedingt wird. — Ist jetzt $J = 0$, so liefern beide Möglichkeiten den gleichen Typus, da die zu $\mathfrak{C}$ gehörige „Gerade“ $\mathfrak{C}_1$ auf einer I gegen II [O gegen U] abgrenzenden Kurve liegt. — Ist aber $J \neq 0$, so bestimmt J eindeutig, welches von den beiden in Frage kommenden $\mathfrak{E}_i$ zu wählen ist, q. e. d. Aus dem Beweis (cf. besonders Mitte dieser Seite!) folgt der

Zusatz: *Einer* $|S|$ *entsprechen dann und nur dann Typen geschlossener Kurven, wenn*

1. *nicht zwei gleichbenannte Elemente in* $|S|$ *aufeinander folgen (da es sonst reduzible Schnittklassen gäbe),*

2. *das erste und das letzte Element der Kette* $(\mathfrak{k})$ *denselben unteren Index haben (was im bestimmten Fall durch Anfügung von* $\leqq 2$, *im Unbestimmten von* $\leqq 1$ *Elementen stets erreichbar ist).*

Soll auch S ein Kurventypus entsprechen, so ist nur die Orientierung eines Elementes UK und eines Elementes SK in S willkürlich; die aller übrigen Elemente wird hierdurch und durch $|S|$ bestimmt.

Anhang 1: Invariante Bestimmung der unendlichen, orientierten Schnittreihe.

Wir hatten die unendliche, orientierte Schnittreihe S^∞ einer Kurve $\mathfrak{C}$ mit einem Kurvensystem $\{\mathfrak{K}^\varkappa\}$ gewonnen, indem wir ein $f(\mathfrak{C}) = \overrightarrow{M_1 M_2}$ von M_1 nach M_2 durchliefen und dabei feststellten, wann $f(\mathfrak{C})$ auf die einzelnen Erzeugenden $f(\mathfrak{K}^\varkappa)$ von irreduziblen Schnittklassen von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{K}^\varkappa$ trifft. Wir sahen, daß die Elemente von S^∞ nur davon abhängen, wie die Endpunkte der Erzeugenden zu M_1 und M_2 liegen. Dies wollen wir jetzt ausnutzen.

Der $\mathfrak{U}$ berandende Einheitskreis wird durch M_1 und M_2 in zwei Bogen zerlegt, von denen der eine rechts von dem gerichteten $f(\mathfrak{C})$ liegt; diesen rechten Bogen $M_1 M_2$ legen wir der weiteren Betrachtung zugrunde. Durchlaufen wir ihn von M_1 nach M_2, so treffen wir sukzessive auf die Anfangs- bezw. Endpunkte aller Erzeugenden $f(\mathfrak{K}^\varkappa)$, von denen jedes nur durch einen Punkt vertreten ist, welchen Punkt wir also als Repräsentanten der Erzeugenden auffassen können. Damit ist unter den Erzeugenden eine bestimmte Reihenfolge festgelegt; sie erhalten die positive oder negative Orientierung, je nachdem ob der End- oder Anfangspunkt der betreffenden Erzeugenden angetroffen wird.

Die Gleichwertigkeit dieser unendlichen Reihe mit S^∞ ist aus dem Beweis von (1), p. 236 ersichtlich, da sich nach diesem S^∞ stets auf die gleiche Gestalt wie unsere unendliche Reihe bringen läßt; wir sind daher berechtigt, sie ebenfalls S^∞ zu nennen.

Die Invarianz unserer S^∞ gegenüber Deformationen von $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{K}^\varkappa$ ist evident, da bei Deformationen die Endpunkte der f stets in Ruhe bleiben.

Unsere neue Bestimmung der S^∞ hat vor der alten den Vorzug, daß sie für alle zu $\mathfrak{C}$ bezw. $\mathfrak{K}^\varkappa$ homotopen Kurven definiert ist, während früher an die Lage der $\mathfrak{K}^\varkappa$ gegeneinander gewisse Anforderungen gestellt wurden, weiter daß ihre Invarianz unmittelbar ersichtlich ist, schließlich, daß sie keine Unbestimmtheiten aufweist. Es gibt also für sie keine erlaubten Transpositionen; dieser Vorteil wird dadurch zum Nachteil, daß sich in manchen Fällen die S^∞ von $\mathfrak{C}$ von der S^∞ von $\mathfrak{C}^{-1}$ nicht nur durch die Umkehrung der Reihenfolge und der Orientierung der einzelnen Elemente unterscheidet, sondern auch durch Veränderung der Reihenfolge einzelner Elemente — stets wenn bei unserer alten Definition Unbestimmtheitsstellen auftraten. Dieser Umstand läßt uns die alte Bestimmung auch für die im Anhang 2 zu besprechende, wichtige Modifikation geeigneter erscheinen.

Man könnte diesen Nachteil beseitigen, indem man die Reihenfolge auf dem rechten und die auf dem linken Bogen: $M_1 M_2$ des $\mathfrak{U}$ berandenden Einheitskreises als S^∞ festlegte bezw. den Übergang von der einen zur anderen gestattete; aber einmal würde damit der Vorzug der Eindeutigkeit verloren gehen, und weiter würde es ganz unbestimmt werden, wie dieser erlaubte Übergang für die Perioden (cf. p. 237!) der beiden S^∞ zu erklären ist.

Anhang 2: Charakterisierung der Elemente der Fundamentalgruppe.

Elemente der *Poincaré*schen Fundamentalgruppe F [1]) einer Fläche $\mathfrak{F}$ sind bekanntlich die Klassen von ineinander unter Festhaltung eines bestimmten Punktes P auf $\mathfrak{F}$ deformierbaren gerichteten Kurven.

Sei also P ein beliebig zu wählender, aber fester Punkt auf $\mathfrak{F}$; sei $\mathfrak{C}$ eine beliebige Kurve auf $\mathfrak{F}$ durch P.

Wir suchen die Invarianten von $\mathfrak{C}$ gegenüber stetigen Deformationen mit P als Fixpunkt.

Hierzu betrachten wir ein $\overline{\mathfrak{C}} = \overrightarrow{P_1 P_2}$, wo $P_j (j = 1, 2)$ über P gelegen ist. — Weiter sei $\{\mathfrak{K}^i\}$ ein System von Kurven derart, daß die endliche, orientierte Schnittreihe von $\mathfrak{C}$ mit $\{\mathfrak{K}^i\}$ definiert sei.

---

[1]) cf. *v. Kerékjártó:* Topologie I, p. 178.

Wir bilden dann eine erweiterte Schnittreihe von $\mathfrak{C}$ mit $\{\mathfrak{R}^i\}$; diese wird ebenso wie die gewöhnliche endliche, orientierte Schnittreihe gebildet — mit zwei Abänderungen:

1. in die erweiterte Schnittreihe werden alle und nur die $f(\mathfrak{R}^i)$ aufgenommen, die P_1 von P_2 trennen; diese $f(\mathfrak{R}^i)$ brauchen also nicht noch überdies die Eigenschaft zu haben, M_1 von M_2 zu trennen, wo $\overrightarrow{M_1 M_2} =$ dem $f(\mathfrak{C})$, auf dem unser $\overline{\mathfrak{C}}$ liegt;

2. die Auswahl der Punkte P_1, P_2, durch die die endliche aus der unendlichen Schnittreihe herausgegriffen wird, ist nicht mehr willkürlich, sondern durch den fest gewählten Punkt P bestimmt.

Es hören also die zyklischen Permutationen auf, erlaubte Operationen zu sein; dies bleiben einzig noch die erlaubten Transpositionen.

Ähnlich wie Satz 3 (cf. besonders den Hilfssatz (1), p. 236!) beweist man den

Satz 3a: *Die erweiterte Schnittreihe von $\mathfrak{C}$ mit $\{\mathfrak{R}^i\}$ ist invariant gegenüber Deformationen von $\mathfrak{C}$ mit P als Fixpunkt bis auf erlaubte Transpositionen.*

Ähnlich wie Satz 4 (cf. besonders Hilfssatz (a), p. 239!) beweist man den

Satz 4a: *Die Klasse von $\mathfrak{C}$ ist durch die erweiterte, nichtorientierte Schnittreihe $|S|$ mit Σ eindeutig bestimmt, d. h. zwei Kurven $\mathfrak{C}_j$ $(j = 1, 2)$ sind unter Festhaltung von P ineinander deformierbar, wenn $|S_1| \sim |S_2|$, d. h. durch erlaubte Transpositionen ineinander überführbar sind.*

Von dem Zusatz bleiben die Bedingungen 1. und 2. richtig.

Seien jetzt $\mathfrak{C}_j (j = 1, 2)$ zwei Elemente aus F, E_j ihre nichtorientierten, erweiterten Schnittreihen mit dem Kurvensysten Σ.

Wir suchen die zu dem Element $\mathfrak{C}_{12} = \mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$ zugehörige $\mathfrak{E}_{12}$.

Man schreibe die Elemente von E_2 hinter denen von E_1 in ihrer Reihenfolge auf und erhält so eine Reihe E; auf diese können wir erlaubte Transpositionen anwenden; wird durch diese bewirkt, daß in E zwei gleichnamige Elemente aufeinanderfolgen, so werden sie entfernt; fahren wir in dieser Weise solange, wie möglich, fort, so gelangen wir nach endlich vielen Schritten zu der gesuchten Schnittreihe; es gilt dann also in leicht verständlicher Symbolik:

$$E_{12} = E_1 + E_2.$$

Daß E_{12} wirklich die gesuchte erweiterte Schnittreihe ist, sieht man leicht ein; denn einmal können in ihr höchstens die Elemente von E_1 und E_2 auftreten; andererseits wird aber eine Erzeugende, die zweimal auftritt, nicht mehr P_1^{12} von P_2^{12} trennen.

§ 2. Die *Dehn*schen Normalformen [1]).

Wir haben im § 1 ein vollständiges Invariantensystem beliebiger Kurventypen aufgestellt. Einen anderen Weg zur Charakterisierung einfacher Kurventypen — d. s. solche, unter deren Individuen auch einfache Kurven vorkommen — deutet *Dehn* l. c. an: Er konstruiert Normalformen einfacher Kurven [2]), die den Typus derselben vollständig charakterisieren sollen; wir werden zeigen, daß sie dies wirklich tun, d. h. daß zu jedem Typus einfacher Kurven 1. genau eine solche Normalform gehört und daß 2. zu verschiedenen Typen auch verschiedene Normalformen gehören.

I. Konstruktion der *Dehn*schen Normalformen.

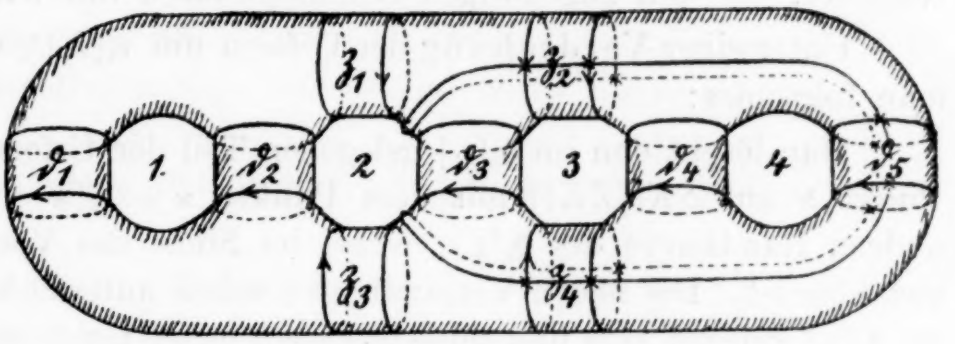
Außer den UK und SK wählen wir auf $\mathfrak{F}$ noch ein System untereinander punktfremder Kurven: ZKi $(i = 1, \ldots, 2(p-2))$ aus, derart, daß die ZK mit

---

[1]) cf. *Max Dehn:* Autographierter Vortrag im Breslauer mathematischen Colloquium vom 12. II. 1922.

[2]) Er tut dies sogar für Systeme von endlich vielen, untereinander punktfremden, einfachen Kurven; cf. jedoch p. 246.

den SK zusammen $\mathfrak{F}$ in $2(p-1)$ berandete Flächen zerlegen, die je einer Kugel mit drei Löchern homoiomorph sind [1]). Die ZK mögen so ausgewählt sein, daß sie mit den SK punktfremd sind und je mit genau zwei UK einen irreduziblen Schnittpunkt gemein haben. Die SK, UK, ZK werden orientiert, wie es in der Figur 1 angegeben ist.



Figur 1.

Unter einem $PXKi$ ($X = S, U, Z$) sei eine zu XKi isotope [2]) Kurve verstanden, die mit XKi auf $\mathfrak{F}$ einen Ringbereich berandet und für alle l mit YKl genau dieselben irreduziblen Schnittpunkte gemein hat wie XKi.

Unter einem $\mathfrak{d}_i$ sei ein ganz auf I gelegener, von SKi und einem $PSKi$ berandeter Ringbereich verstanden; weiter sei der Drehring des UKi ein ganz auf O gelegener, von UKi und einem $PUKi$ berandeter Ringbereich; schließlich sei $\mathfrak{z}_i$ ein von ZKi und einem $PZKi$ berandeter Ringbereich, derart, daß der $PZKi$ ganz auf der rechten Seite des ZKi gelegen ist. Die $\mathfrak{d}_i$ und $\mathfrak{z}_n$ seien untereinander punktfremd ausgewählt.

Seien UKi und SKk untereinander punktfremd. Unter einer Trennungslinie $TLik$ — für $i = k$ auch TLi genannt — ist eine einfache Kurve zu verstehen, die, von ZK abgesehen, nur mit UKi und SKk je genau zwei irreduzible Schnittpunkte in der Reihenfolge: UKi, SKk, UKi, SKk gemein hat. Ein von zwei $TLik$ berandeter Ringbereich heiße $\mathfrak{d}^*_{ik}$ ($\mathfrak{d}^*_{ii} = \mathfrak{d}^*_i$). In Figur 1 findet sich eine TL 25. Unter der Urform einer *Dehn*schen Normalform sei ein System von endlich vielen, untereinander fremden, einfachen Kurven auf $\mathfrak{F}$ verstanden, dessen einzelne Elemente TL, PXK und Kurven des Index $J = O$ sind, welche mit den Randkurven der $\mathfrak{d}_i, \mathfrak{z}_i$ und den UK nur irreduzible Schnittpunkte gemein haben. Die TL und PXK mögen ganz im zugehörigen Ringbereich ($\mathfrak{d}$, Drehring des UK, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{d}^*$) liegen.

Sei $m_i[l_i]$ die Zahl der Schnittpunkte einer Urform mit $SKi[ZKi]$, $\nu_i[\lambda_i]$ die Zahl der $PSKi[PZKi]$ im $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{z}_i]$: dann ist durch $\begin{pmatrix} \ldots, m_i, \ldots, \ldots, l_i, \ldots \\ \ldots, \nu_i, \ldots, \ldots, \lambda_i, \ldots \end{pmatrix}$ die Urform eindeutig bestimmt [3]). Denn in den dreilöchrigen Kugeln, in die $\mathfrak{F}$ durch die SKi und ZKi zerlegt wird, ist die Zahl der Verbindungen zweier verschiedener Ränder miteinander oder eines Randes mit sich selbst — in diesem letzten Falle haben wir es mit TL zu tun — durch die m_i, l_i eindeutig bestimmt.

Wir numerieren jetzt die Schnittpunkte der Urform mit einem $SKi[ZKi]$ von 1 bis $m_i[l_i]$, in dem wir mit einem beliebigen Punkte beginnen und der Orien-

[1]) sog. dreilöchrige Kugeln.

[2]) cf. *v. Kerékjártó:* l. c., p. 190.

[3]) Für die Zahlenpaare der Urform gilt stets: $m_i \cdot \nu_i = 0$, $l_i \cdot \lambda_i = 0$.

tierung entsprechend weiterzählen. Ebenso erteilen wir den im Innern des $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{z}_{\delta_i}]$ verbundenen Schnittpunkten der Urform mit Randkurven des $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{z}_{\delta_i}]$ die gleiche Nummer, wie den zugehörigen Schnittpunkten mit $SKi[ZKi]$.

Unter einer Verdrehung der Urform um $\nu_i[\lambda_i] \gtreqless 0$ längs $SKi[ZKi]$ versteht man folgendes:

Man löscht den im $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{z}_{\delta_i}]$ gelegenen Teil der Urform und verbindet dafür den Punkt $\varkappa$ auf $SKi[ZKi]$ mit dem Punkte $\varkappa + \nu_i[\varkappa + \lambda_i]$ auf $PSKi[PZKi]$, der andern Randkurve des $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{z}_{\delta_i}]$, wobei im Sinne des Vorzeichens von $\nu_i[\lambda_i]$ weiterzuzählen ist. Die neuen Verbindungen sollen untereinander punktfremd und ganz im $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{z}_{\delta_i}]$ gelegen sein und müssen diesen unter Umständen mehrmals durchlaufen.

Diese allgemeinste Dehnsche Normalform ist eindeutig durch

$$\begin{pmatrix} \ldots, m_i, \ldots, \ldots, l_i, \ldots \\ \ldots, \nu_i, \ldots, \ldots, \lambda_i, \ldots \end{pmatrix}$$

bestimmt [1]).

II. Invarianz der *Dehn*schen Normalformen.

1. *Die Invarianten S, J (cf. Satz 4, p. 239!) einer in Dehnscher Normalform befindlichen Kurve* $\mathfrak{C}$ *sind durch die Dehnschen Zahlen:* $m_i, \nu_i, l_i, \lambda_i$ *derselben eindeutig bestimmt.*

Hieraus folgt dann, daß zu einer *Dehn*schen Normalform genau ein Kurventypus gehört.

Beweis: Bezeichnen wir mit T das System der SK, UK, ZK, so ist durch die *Dehn*schen Zahlen von $\mathfrak{C}$ die Reihenfolge der Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ mit Kurven aus T bis auf zyklische Permutationen eindeutig festgelegt, ebenso ihre Orientierung [2]). Diese Schnittpunkte brauchen nicht sämtlich irreduzibel zu sein. Man hat Paare reduzibler Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ mit einer Kurve aus T vor sich, sobald in der Reihenfolge der Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ mit T hintereinander zwei entgegengesetzt orientierte Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ mit derselben Kurve aus T auftreten, oder wenn dies durch erlaubte Operationen mit der Reihenfolge der Schnittpunkte zu erreichen ist. Läßt man nacheinander alle derartigen Paare reduzibler Schnittpunkte aus unserer Reihe fort, so erhält man schließlich die endliche, orientierte Schnittreihe T von $\mathfrak{C}$ mit T.

Mit T ist ohne weiteres auch S gegeben. Aus S läßt sich ablesen, ob $J = 0$ oder $\neq 0$.

Ist aber $J \neq 0$ und kommen in S nur SK vor, so wird $J = O$ oder $= U$, je nachdem ob alle $\nu_i, \lambda_i = 0$ sind oder nicht [3]).

---

[1]) Da eine Verdrehung um $\nu_i \neq 0$ $[\lambda_i \neq 0]$ nur in Frage kommt, wenn in der Urform $\nu_i = 0$ $[\lambda_i = 0]$ ist.

[2]) Die Orientierung von Schnittpunkten ist in Übereinstimmung mit der Orientierung irreduzibler Schnittpunkte zu definieren.

[3]) Ein anderes Kriterium ist das folgende: Es wird $J = U$ oder $= O$, je nachdem ob beim Übergang von der Reihenfolge der Schnittpunkte mit T zur Schnittreihe UK weggelassen wurden oder nicht.

Ist schließlich $J \neq 0$ und kommen in S nur UK vor, so wird $J = I$ oder $= II$, je nachdem was für ZK in T vorkommen, d. h. je nachdem ob diese ZK auf I oder auf II gelegen sind, q. e. d.

2. *Die Dehnsche Normalform einer Kurve* $\mathfrak{C}$, *die einfachen Kurven homotop ist, existiert und sie bzw. ihre Dehnschen Zahlen sind durch die Invarianten* S, J *eindeutig bestimmt.*

Hieraus folgt, daß zu jedem einfachen Kurventypus genau eine *Dehn*sche Normalform gehört.

Beweis: Wegen Satz 3, p. 238 und Satz 4, p. 239 ist durch S, J eindeutig auch die endliche, orientierte Schnittreihe T von $\mathfrak{C}$ mit T bestimmt. — Wegen der Sätze 2, 3 können wir annehmen, daß $\mathfrak{C}$ mit den Grenzkurven der $\mathfrak{d}_i, \mathfrak{z}_i$ und den UKi nur irreduzible Schnittpunkte gemein hat. Die beiden Grenzkurven eines $\mathfrak{d}_i[\mathfrak{z}_i]$ haben dann notwendig die gleiche Zahl positiv- bzw. negativorientierter Schnittpunkte mit $\mathfrak{C}$.

Dadurch sind die Werte der m_i, l_i bestimmt und damit auch die Urform der Normalform, wenn $\mathfrak{C}$ nicht zufällig ein PSK oder PZK ist, in welchem Falle wir allerdings nichts weiter zu beweisen haben.

$\mathfrak{C}$ *ist auf genau eine Weise mit der Urform in Übereinstimmung und damit auf Dehnsche Normalform zu bringen.*

Wenn wir dies gezeigt haben, wird auch 2. bewiesen sein. — Die *Dehn*sche Normalform geht aus der Urform durch Verdrehungen hervor; bei diesen bleiben die folgenden vier Arten von Verbindungen in Ruhe:

1. eines $\mathfrak{d}_k$ mit einem $\mathfrak{d}_l$, $(k \neq l)$
2. eines $\mathfrak{z}_k$ mit einem $\mathfrak{z}_l$, $(k \neq l)$
3. eines $\mathfrak{d}_k$ mit einem $\mathfrak{z}_l$,
4. eines $\mathfrak{d}_k[\mathfrak{z}_k]$ mit sich selbst,

welche je in einer der dreilöchrigen Kugeln gelegen sind, in die $\mathfrak{F}$ durch die $\mathfrak{d}_i, \mathfrak{z}_i$ zerlegt wird. $\mathfrak{C}$ mit der Urform in Übereinstimmung bringen heißt also, die entsprechenden Verbindungen von $\mathfrak{C}$ in die durch die Urform geforderte Lage durch eine Deformation von $\mathfrak{C}$ bringen.

Die ersten drei Arten von Verbindungen werden durch ein Stück eines UK „gekennzeichnet", das eine ebensolche Verbindung ist, die vierte Art stellt „Ansatzstellen" für TL dar.

Durch die Urform wird gefordert, daß von den Verbindungen der ersten drei Arten eine gewisse Zahl ganz auf O, der Rest ganz auf U gelegen ist, von denen der vierten Art, daß zwischen den Schnitten mit der Randkurve des $\mathfrak{d}_k[\mathfrak{z}_k]$ genau einer mit einem UK liegt.

Die Verbindungen der ersten drei Arten sind deshalb nur auf eine Art in die durch die Urform vorgeschriebene Lage zu bringen, weil man sie nur über die kennzeichnenden UK-Stücke hinwegdeformieren kann; ein gleiches gilt von den Verbindungen der vierten Art, da etwaige überzählige Schnitte mit UK je nur mit dem einen Schnitt mit der Randkurve transponiert werden können.

Sorgen wir noch dafür, daß sich in keinem $\mathfrak{d}_k[\mathfrak{z}_k]$ Paare reduzibler Schnitte

mit UK finden, so haben wir unsere Kurve auf *Dehn*sche Normalform gebracht; wir haben auch gesehen, daß dies nur auf eine Weise möglich war, da die Urform eindeutig durch T bestimmt war und die Kurve nur auf eine Weise mit der Urform in Übereinstimmung gebracht werden konnte, q. e. d.

Zusammenfassend ergibt sich der

Satz 5: *Zu jedem einfachen Kurventypus gehört genau eine Dehnsche Normalform, zu verschiedenen aber verschiedene.*

III. Die *Dehn*schen Normalformen von Systemen von endlich vielen Kurven.

Bemerken wir, daß die Urformen der *Dehn*schen Normalformen aus endlich vielen, untereinander punktfremden, einfachen Kurven bestehen, daß weiter die Verdrehungen der Urform in keiner Weise so bestimmt sind, daß die sich ergebende *Dehn*sche Normalform nur aus einer einzigen Kurve besteht, so sehen wir, daß die *Dehn*schen Normalformen im allgemeinen Systeme von endlich vielen, untereinander fremden, einfachen Kurven sind. —

Zunächst folgt ohne weiteres aus den Sätzen 3, p. 238 und 4, p. 239:

Irgendzwei Systeme von endlich vielen Kurven sind dann und nur dann homotop, d. h. durch gleichzeitige stetige Deformation aller Kurven des einen Systems ineinander überführbar, wenn sich eine solche eineindeutige Zuordnung der Kurven des einen zu denen des andern Systems finden läßt, daß die zugeordneten Kurven homotop sind, also in den Invarianten S, J übereinstimmen.

Durch eine geringe Modifikation des Beweises des Satzes 5 folgt hieraus dann der

Satz 5 a: *Jedes System von endlich vielen Kurven, das wenigstens einem System punktfremder, einfacher Kurven homotop ist, läßt sich auf genau eine Weise auf Dehnsche Normalform bringen; zwei Kurvensysteme lassen sich dann und nur dann auf die gleiche Normalform bringen, wenn sie homotop sind.*

Über das Minimum von ganzen Funktionen.

Von *Guido Hoheisel* in Breslau.

Über das Minimum einer ganzen Funktion in einem von Nullstellen freien Gebiete sind keine sehr scharfen Abschätzungen bekannt. Diese Lücke auszufüllen, ist das Ziel dieser Arbeit. Das nullstellenfreie Gebiet wird hier einfach zusammenhängend angenommen. Der Durchsichtigkeit halber sei es als gewöhnlicher Winkelraum

$$\alpha < \arg z < \beta; \quad (\beta - \alpha < 2\pi)$$

gedacht. Verallgemeinerungen in dieser Hinsicht werden am Schluß angegeben. Mit $M(r)$ wird der Maximalbetrag von $|f(z)|$ auf dem Kreise $|z| = r$ bezeichnet. Wir wollen beweisen:

Ist die ganze Funktion $f(z)$ in einem Winkelraum (α, β) nullstellenfrei, dann gibt es zu positiven Zahlen ε, η immer eine positive Zahl $\sigma = \sigma(\varepsilon, \eta)$, so daß

$$|f(z)| > M^{-\sigma}(r(1+\eta))$$

im ganzen Winkelraum $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$ gilt. Dabei ist σ eine geometrische Konstante, also unabhängig von f.

Zum *Beweise* sei an eine Anwendung der *Jensen*schen Formel erinnert, die von *Lindelöf* bemerkt worden ist.

In der *Jensen*schen Formel (die Annahme $f(0) = 1$ bedeutet keine Einschränkung)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \log\frac{r^n}{|a_1 \ldots a_n|},$$

wo $a_1, \ldots, a_n$ die Nullstellen von $f(z)$ in $|z| < r$ bedeuten, ist die rechte Seite sicherlich positiv.

Ist also für ein $\sigma > 0$ l die Länge aller Intervalle auf $|z| = r$, in denen

$$|f(z)| < M^{-\sigma}(r)$$

ist, dann folgt

$$0 < \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi < (2\pi r - l)\log M(r) - l\sigma \log M(r).$$

Mithin

$$2\pi r - l(1+\sigma) > 0$$

$$l < \frac{2\pi r}{1+\sigma}.$$

Es sei nun $\tau = \tau(\varepsilon, \eta)$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ und kleiner als $\frac{\eta}{2}$. Dann gibt es mithin ein $\sigma_1 = \sigma(\tau)$ derart, daß in jedem Bogenstück des Kreises $|z| = r$ von der Länge $2\pi r\tau$ wenigstens ein Punkt liegt, für den

$$|f(z)| > M^{-\sigma_1}(r)$$

ist. Es sei jetzt z irgendein Punkt in $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$. Dann gibt es auf $|z| = r$ einen Punkt Z, so daß der Bogen $(zZ) < r\tau$ und ferner

$$|f(Z)| > M^{-\sigma_1}(r)$$

ist. Um Z werde der Kreis mit $2r\tau$ geschlagen, der wegen $\tau < \frac{\varepsilon}{2}$ ganz in (α, β) liegt. Der Punkt z liegt offenbar im Innern, denn es ist

$$|z - Z| < r\tau .$$

Wird dieser Kreis durch Ähnlichkeitstransformation auf den Einheitskreis $|\omega| \leqq 1$ abgebildet, so daß der Punkt Z in den Nullpunkt geht, so verwandelt sich $f(z)$ in eine Funktion $\varphi(\omega)$. Der feste Punkt z hat seinen Bildpunkt in

$$|\omega| < \frac{1}{2} .$$

$\varphi(\omega)$ ist nullstellenfrei. Ist M_0 das Maximum von $\varphi(\omega)$ in $|\omega| \leqq 1$, dann gilt nach einer *Borel*schen Ungleichung

$$\left|\frac{\varphi(0)}{\varphi(\omega)}\right| < M_0^{\frac{2\varrho}{1-\varrho}}$$

für alle $|\omega| \leqq \varrho$. Wegen

$$M_0 \leqq M(r(1 + 2\tau))$$

folgt für den festen Punkt z

$$|f(z)| > M(r(1 + 2\tau))^{-2}\,|f(Z)|$$
$$|f(z)| > M(r(1 + 2\tau))^{-(2+\sigma_1)} > M(r(1 + \eta)) = M^{-\sigma}(r(1 + \eta))$$

was wir beweisen wollten.

Der Beweis bleibt wörtlich erhalten, wenn statt des gewöhnlichen Winkelraums ein allgemeiner vorliegt, d. h. die Menge aller z, für welche

$$\alpha(r) < \arg z < \beta(r) \qquad (0 < r < \infty)$$

gilt. Dabei soll für große r

$$\liminf\,(\beta(r) - \alpha(r)) > 0$$

sein. $\alpha(r)$ und $\beta(r)$ sollen außerdem stetig sein und ihre Differenzenquotienten wie $\frac{1}{r}$ abnehmen, genauer

$$|\alpha(r + h) - \alpha(r)| < \text{const.}\,\frac{|h|}{r} .$$

Es läßt sich auch dann $\tau = \tau(\varepsilon, \eta)$ so bestimmen, daß der Kreis um Z ganz innerhalb des Winkelraumes liegt.

Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 und Leipzig
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 59533

Im Druck befinden sich:

Gewöhnliche Differentialgleichungen

von

Dr. J. Horn

o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt

Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 4 Figuren. Groß-Oktav

(Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine Mathematik, Band 10)

Elliptische Funktionen

von

Dr. R. König und **Dr. M. Krafft**

o. Professor a. d. Universität Münster i. W. — Privatdozent a. d. Universität Marburg i. H.

Mit 4 Figuren. Groß-Oktav

(Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine Mathematik, Band 11)

Astronomischer Jahresbericht

Gegründet von

Walter F. Wislicenus

Mit Unterstützung der Astronomischen Gesellschaft

herausgegeben von dem

Astronomischen Recheninstitut

zu Berlin-Dahlem

28. Band (Die Literatur des Jahres 1926)